ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2º Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Fisica matematica. — *Sull'equazione differenziale* $\Delta_2 u + \lambda u = 0$. Nota di LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente T. LEVI-CIVITA.

Noi vogliamo trattare una questione che, nelle sue linee generali, è abbastanza conosciuta [1]; ma la semplicità del metodo che qui potremo adoperare conferisce forse opportunità all'esposizione di queste poche idee.

Indichiamo con τ un campo d'estensione finita, per esempio una porzione di piano, e con σ il suo contorno. Misuri R il raggio del minimo circolo nell'interno del quale si può racchiudere tutto il campo τ: è chiaro che questo circolo è unico, perchè, se ne esistessero due, diversamente posti, il campo τ entrerebbe nella regione comune a due circoli uguali, dunque anche in un circolo di estensione minore.

Avremo bisogno di richiamare la seguente formula di Green

$$\text{(I)} \qquad 2\pi\varphi = \int_\sigma \varphi \frac{d}{dn}\left(\log\frac{1}{r} - \mathrm{G}\right) d\sigma - \int_\tau \left(\log\frac{1}{r} - \mathrm{G}\right)\Delta_2\varphi\, d\tau\,,$$

dove G è la *funzione di Green*, cioè quella funzione monodroma, finita e continua in tutto il campo τ, la quale verifica l'equazione $\Delta_2 \mathrm{G} = 0$ in ogni punto interno al campo, e l'equazione $\mathrm{G} = \log\frac{1}{r}$ in ogni punto del contorno σ [2]. La funzione φ è, sotto note restrizioni, una funzione arbitraria, e gli altri simboli che figurano nella (I) sono abbastanza conosciuti perchè noi possiamo evitare di darne la spiegazione.

Noi vogliamo, dopo questa premessa, considerare l'equazione differenziale

$$(1) \qquad \Delta_2 u + \lambda u = 0\,,$$

dove λ è una costante (reale o complessa). Quest'equazione ha molta importanza in fisica matematica; ed è un notevole problema, d'immediata applicazione fisica, quello di trovare i *casi d'eccezione* relativi a λ, cioè quei valori di λ, tali che una funzione u, nulla in ogni punto di σ, e vincolata in ogni punto interno a τ dalla (1), *e da condizioni come quelle*

[1] Schwarz, *Integration der part. Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + pu = 0$ *unter vorgeschribenen Bedingungen*, Abhand. Berlin, 1890.

[2] Alcuni autori definiscono come qui la funzione di Green; V. per es. Cesàro: *Introduz. alla teoria mat. dell'elasticità*; Marcolongo: *Teoria mat. dell'equilibrio dei corpi elastici*. Altri autori chiamano *funzione di Green* ciò che qui chiameremmo $\mathrm{G} + \log r$. V. per. es. Riemann-Weber, *Die part. Differentialgleichungen der math. Physik*.

che valgono per φ *nella* (I), possa *non* essere in tutto il campo τ identicamente nulla [1]. La ricerca di questi valori speciali di λ è un problema di lunga e difficile risoluzione. Alcune nuove teorie molto efficaci, contenute in recenti studî [2], lasciano trattare sistematicamente questo problema; ma noi vogliamo limitarci a una ricerca molto più semplice: vogliamo cioè determinare un campo di numeri complessi (cerchio col centro nell'origine), tale che, per ogni valore di λ ivi contenuto, l'unica soluzione della (1), corrispondente a $u = 0$ in ogni punto del contorno σ, sia $u = 0$ in ogni punto del campo τ.

Il raggio di questo cerchio, così come noi lo determineremo, sarà $= \frac{4}{R^2}$, dove per R vale la definizione dianzi data.

Supponiamo dunque che u sia nulla in ogni punto di σ. La formula (I), applicata alla funzione u, e l'equazione (1), lasciano scrivere

$$2\pi u = \lambda \int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - G\right) u d\tau . \tag{2}$$

Intanto stabiliremo alcune relazioni che ci saranno utilissime. Descriviamo intorno al polo ($r = 0$) un piccolo cerchio, tutto contenuto nel campo τ; ed osserviamo che, se il cerchio è abbastanza piccolo, la funzione $\log \frac{1}{r} - G$ è certamente positiva sulla circonferenza di questo cerchio; ma è anche nulla sul contorno σ, dunque, per note proprietà delle soluzioni della $\Delta_2 = 0$, si può subito asserire che $\log \frac{1}{r} - G$ è una funzione positiva nel campo interno a τ: essa poi tende a $+\infty$ nel polo.

Ora chiamiamo ϱ il raggio vettore misurato a partire dal centro del circolo dianzi definito che ha per raggio R. La funzione ϱ^2 sarà monodroma finita e continua nell'interno di τ, e potrà figurare al posto di φ nella formula (I). Sarà anche $\Delta_2 \varrho^2 = 4$, come è chiaro.

Supponiamo ancora che H sia una funzione, atta a figurare come φ nella (I), e tale che in ogni punto di τ verifichi l'equazione $\Delta_2 H = 0$, e in ogni punto di σ l'equazione $H = \varrho^2$. La formula (I), applicata alla fun-

[1] Vedere per es. Riemann-Weber, libro citato, vol. 2°, cap. 14°.

[2] Alludiamo ai recenti lavori di D. Hilbert e della sua scuola. Da tali lavori si è avuta nuova luce in questo campo di ricerche. Nella notevole Memoria del sig. Erhard Schmidt (*Entwicklung willk. Functionen nach Systemen vorgeschriebener*, Inaug. Dissert. Göttingen), a pag. 9, § 5, è contenuta una formula, che, paragonata colla nostra (4), condurrebbe a una limitazione come la (5): si troverebbe $|\lambda| < \frac{2}{\pi R^2}$. Qui, in questo caso molto particolare, noi abbiamo potuto trovare una limitazione più vantaggiosa.

zione $H - \varrho^2$, lascia scrivere

$$2\pi(H - \varrho^2) = 4 \int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - G\right) d\tau, \tag{3}$$

perchè, come abbiamo detto, è $\Delta_2 \varrho^2 = 4$. Ma, per le proprietà dianzi richiamate sulle soluzioni della $\Delta_2 = 0$, la funzione H non può avere massimi e minimi interni a τ, dunque in tale campo non è mai negativa e non supera il massimo R^2.

Ma allora dalla formula (3) si deduce subito [1]

$$\int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - G\right) d\tau < \frac{\pi R^2}{2}. \tag{4}$$

Giova rammentarsi che la funzione sotto l'integrale è positiva: dopo ciò vedremo che la relazione (4) ci sarà molto utile.

Supponiamo ora che sia

$$|\lambda| = \frac{4\alpha}{R^2}, \tag{5}$$

dove α è un numero positivo fisso < 1. Vediamo come quest'ipotesi ci porta rapidamente ad affermare che la funzione u dev'essere nulla in ogni punto di τ.

Facciamo, invece, l'ipotesi che esista una funzione u, diversa da zero, la quale abbia le proprietà dianzi ammesse; e sia U il limite superiore di $|u|$ nell'interno del campo τ.

Un ragionamento di successive approssimazioni ci condurrà a quello che vogliamo dimostrare. Poniamo

$$2\pi(u + \varepsilon_1) = 0.$$

L'errore

$$\varepsilon_1 = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - G\right) u \, d\tau,$$

che in tal modo facciamo nella determinazione di u, verifica, per le cose dianzi esposte, la relazione

$$|\varepsilon_1| < \alpha U.$$

Se, come seconda approssimazione, poniamo

$$2\pi(u + \varepsilon_2) = \lambda \int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - G\right)(u + \varepsilon_1) \, d\tau = 0,$$

[1] Se, invece di considerare il circolo di raggio R, avessimo, per esempio, considerato una striscia d'ampiezza X, racchiudente il campo τ; allora parlando della funzione x^2 invece che dalla funzione $\varrho^2 = x^2 + y^2$, saremmo giunti alla limitazione $\int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - G\right) d\tau < \pi \frac{X^2}{4}$. Si presenta anche facile il caso intermedio di un'ellisse; etc.

il nuovo errore

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - \mathrm{G} \right) \varepsilon_1 \, d\tau ,$$

verifica analogamente la relazione

$$|\varepsilon_2| < \alpha \, |\varepsilon_1| < \alpha^2 \, \mathrm{U} .$$

Continuando vedremo che, in generale, l'errore

$$\varepsilon_\nu = \frac{\lambda}{2\pi} \int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - \mathrm{G} \right) \varepsilon_{\nu-1} \, d\tau ,$$

ottenuto ponendo

$$2\pi (u + \varepsilon_\nu) = \lambda \int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - \mathrm{G} \right) (u + \varepsilon_{\nu-1}) \, d\tau = 0 ,$$

verifica la relazione

$$|\varepsilon_\nu| < \alpha \, |\varepsilon_{\nu-1}| < \cdots < \alpha^\nu \, \mathrm{U} .$$

Evidentemente α^ν tende a zero per ν infinito, dunque l'errore ε_ν tende a zero. Possiamo subito dedurne che, finchè valga la (5), non è possibile che la funzione u differisca da zero.

Lo stesso metodo di approssimazioni successive ci fa trovare, sempre che valga la (5), l'unico integrale u della (1). Giungiamo così allo sviluppo in serie

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\pi u(x, y) &= \mathrm{F}(x, y) + \lambda \int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - \mathrm{G} \right) \mathrm{F}(\eta, \xi) \, d\tau \\ &\quad + \lambda^2 \int_\tau \left(\log \frac{1}{r} - \mathrm{G} \right) \left[\int_{\tau} \left(\log \frac{1}{r} - \mathrm{G} \right) \mathrm{F}(\xi_1, \eta_1) \, d\tau_1 \right] d\tau \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

dove la funzione F è data da

$$\mathrm{F}(x, y) = \int_\sigma u \frac{d}{dn} \left(\log \frac{1}{r} - \mathrm{G} \right) d\sigma ,$$

e negl' integrali in $d\tau$ le funzioni r e G sono funzioni di $x, y; \xi, \eta$; negli altri integrali in $d\tau_1$ sono funzioni di $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$; e negli altri in $d\tau_\nu$ sono funzioni di $\xi_{\nu-1}, \eta_{\nu-1}; \xi_\nu, \eta_\nu$.

Riepilogando, noi abbiamo determinato, nel piano complesso, un circolo col centro nell'origine, tale che nel suo interno non possono cadere valori speciali di λ, Il raggio di questo circolo è tanto più grande quanto più piccolo è il raggio R del minimo circolo che racchiude τ. Nelle vibrazioni delle membrane elastiche, il cosiddetto *tono fondamentale* (1) corrisponde

(1) Riemann-Weber, libro citato, vol. 2°, § 97 e seg.

al più piccolo valore speciale di λ: se la membrana è molto piccola, si deduce che questo valore dovrà essere molto grande.

Per un valore determinato di λ, se il campo τ è molto piccolo, la funzione u, vincolata da (1), è determinata dai suoi valori al contorno. In tale caso, sempre che si ammetta una notevole piccolezza del campo, lo sviluppo (6) può fermarsi, con sufficiente approssimazione, a pochi termini: bisognerà peraltro conoscere per il campo τ, in forma abbastanza comoda, la funzione di Green.

Fisica matematica. — *Nuova risoluzione di un problema fondamentale della teoria dell'elasticità.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

L'Analisi moderna si è accresciuta, in questi ultimi anni, dei metodi di risoluzione delle equazioni integrali lineari. Fra gli autori che hanno studiato questo problema, mi limiterò a citare Fredholm, che nella meravigliosa Memoria: *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (Acta Mathematica, t. 27, a. 1903) ha trovato, con mezzi assai elementari, una formola semplice per la risoluzione dell'equazione integrale:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b f(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \psi(x)\,, \tag{1}$$

ove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, λ è una costante, ed $f(x, y)$, $\psi(x)$ sono funzioni date, regolari nell'intervallo (a, b).

Come osserva Fredholm, la risoluzione della precedente equazione contiene, come caso particolare, la risoluzione dell'equazione integrale abeliana:

$$\int_a^b f(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \psi(x)\,. \tag{2}$$

La Memoria di Fredholm ha dato origine ad una lunga serie di importanti lavori, pubblicati da varî autori (Hilbert, Picard, Schmidt, Plemelj, ecc.), i quali ne hanno fatto delle applicazioni all'Analisi e alla Fisica-matematica.

Se si osserva poi che quasi tutti i problemi statici di Fisica-matematica possono essere ridotti alla risoluzione di equazioni integrali, del tipo (1) o (2), si comprende quale progresso abbiano apportato i risultati di Fredholm alla Fisica-matematica.

Nei lavori di Hilbert [1], l'equazione (2) è chiamata equazione integrale di 1^a *specie*, e la (1) equazione integrale di 2^a *specie*. Egli chiama inoltre

[1] *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, a. 1904 e seg.).