ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

al più piccolo valore speciale di λ: se la membrana è molto piccola, si deduce che questo valore dovrà essere molto grande.

Per un valore determinato di λ, se il campo τ è molto piccolo, la funzione u, vincolata da (1), è determinata dai suoi valori al contorno. In tale caso, sempre che si ammetta una notevole piccolezza del campo, lo sviluppo (6) può fermarsi, con sufficiente approssimazione, a pochi termini: bisognerà peraltro conoscere per il campo τ, in forma abbastanza comoda, la funzione di Green.

Fisica matematica. — *Nuova risoluzione di un problema fondamentale della teoria dell'elasticità.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

L'Analisi moderna si è accresciuta, in questi ultimi anni, dei metodi di risoluzione delle equazioni integrali lineari. Fra gli autori che hanno studiato questo problema, mi limiterò a citare Fredholm, che nella meravigliosa Memoria: *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (Acta Mathematica, t. 27, a. 1903) ha trovato, con mezzi assai elementari, una formola semplice per la risoluzione dell'equazione integrale:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b f(x\,,y)\,\varphi(y)\,dy = \psi(x)\,, \tag{1}$$

ove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, λ è una costante, ed $f(x\,,y)$, $\psi(x)$ sono funzioni date, regolari nell'intervallo $(a\,,b)$.

Come osserva Fredholm, la risoluzione della precedente equazione contiene, come caso particolare, la risoluzione dell'equazione integrale abeliana:

$$\int_a^b f(x\,,y)\,\varphi(y)\,dy = \psi(x)\,. \tag{2}$$

La Memoria di Fredholm ha dato origine ad una lunga serie di importanti lavori, pubblicati da varî autori (Hilbert, Picard, Schmidt, Plemelj, ecc.), i quali ne hanno fatto delle applicazioni all'Analisi e alla Fisica-matematica.

Se si osserva poi che quasi tutti i problemi statici di Fisica-matematica possono essere ridotti alla risoluzione di equazioni integrali, del tipo (1) o (2), si comprende quale progresso abbiano apportato i risultati di Fredholm alla Fisica-matematica.

Nei lavori di Hilbert [1], l'equazione (2) è chiamata equazione integrale di *1ª specie*, e la (1) equazione integrale di *2ª specie*. Egli chiama inoltre

[1] *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, a. 1904 e seg.).

Kern dell'equazione integrale, la funzione data $f(x, y)$, vocabolo che converrà tradurre con *nucleo*.

Per certi valori di λ l'equazione omogenea:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b f(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0 \tag{3}$$

ha delle soluzioni $\varphi(x)$ non identicamente nulle; questi valori di λ sono chiamati da Hilbert *Eigenwerte*, e queste funzioni $\varphi(x)$ *Eigenfunctionen*: io tradurrò questi vocaboli rispettivamente con *autovalori* e *autofunzioni*. Queste denominazioni, suggeritemi dal prof. Levi-Civita, sono più semplici delle ordinarie: *valori eccezionali o singolari, soluzioni eccezionali o singolari (o fondamentali)*, e rispecchiano bene le denominazioni di Hilbert (¹).

Per quanto riguarda la teoria dell'elasticità, ricorderemo che la risoluzione del problema di *determinare la deformazione di un solido elastico, per dati spostamenti superficiali*, è stata ricondotta in varî modi alla risoluzione di un sistema di *tre* equazioni integrali (²), del tipo di Fredholm.

In questa Nota, con procedimento completamente diverso, e pure assai semplice, ottengo la riduzione del problema suddetto alla risoluzione di *una* sola equazione integrale del tipo di Fredholm, nella quale la funzione incognita è la dilatazione cubica e il nucleo è una funzione finita, continua e simmetrica (³). Supponiamo soltanto di saper risolvere il problema di Dirichlet per il campo che si considera, problema che, a sua volta, può notoriamente essere ridotto alla risoluzione di un'equazione integrale.

Aggiungerò anche che il metodo qui adoperato è una ovvia estensione di quello che ho esposto, or non è molto, nel caso di una sfera elastica (⁴); in questo caso infatti la dilatazione cubica soddisfa ad un'equazione integrale

(¹) Sarebbe assai opportuno adottare una denominazione unica: questa breve questione potrà venire discussa nel prossimo Congresso matematico di Roma.

(²) Fredholm, *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* (Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, B, 2, a. 1905); Lauricella, *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. serie 5ª, vol. XV, aprile 1906), è anche utile consultare le Note del giugno e luglio dello stesso anno; Marcolongo, *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica*, id. id., vol. XVI, maggio 1907). Nella Nota recentissima: A. Korn, *Sur un problème fondamental dans la théorie de l'elasticité* (Comptes Rendus, tome CXLV, 16 juillet 1907), è annunziata una nuova soluzione del problema in questione.

(³) Invece nei lavori ora citati, i nuclei non sono simmetrici, inoltre hanno un punto di infinito di 1° ordine nel campo, ciò che dà luogo a qualche complicazione nella risoluzione delle equazioni integrali.

(⁴) Boggio, *Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLI, a. 1906).

particolarissima (triviale), dalla quale si passa immediatamente ad un'equazione differenziale ordinaria di 1° ordine.

Esso metodo vale pure nel caso di quante si vogliano variabili, e permette perciò di *determinare la deformazione di una piastra elastica piana, il cui contorno è sollecitato da forze agenti nel suo piano, conoscendo la deformazione del contorno stesso.*

Poichè inoltre è noto che il problema della determinazione della funzione biarmonica in un'area piana, che assume sul contorno, colla sua derivata normale, valori assegnati, si può considerare come un caso particolare del precedente, così potremo affermare di saper risolvere pure il problema di *determinare gli spostamenti trasversali di una piastra elastica, piana, incastrata, soggetta a date forze agenti su di essa.*

Questo problema può, del resto, esser risolto in altro modo, come mostrerò prossimamente.

1. Premettiamo anzitutto una formola, che ci sarà utilissima per la questione che vogliamo risolvere.

Indichiamo con S un solido limitato da una superficie σ e cerchiamo l'integrale u delle equazioni:

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta_2 u + k\dfrac{d\theta}{dx} = 0 , \text{ (in S)} \\ u = \varphi , \qquad\qquad \text{(su } \sigma) \end{cases} \qquad \left(\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$$

ove k indica una costante. θ una funzione regolare in S, e φ una funzione data nei punti di σ.

Si ha, com'è noto:

$$u(x, y, z) = \mathrm{F}(x, y, z) + \\ + \frac{k}{4\pi}\int_{\mathrm{S}} \mathrm{G}(x, y, z\,;\, \xi, \eta, \zeta)\frac{d\theta(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi}\, d\mathrm{S}, \quad (d\mathrm{S} = d\xi\, d\eta\, d\zeta)$$

ove F indica la funzione armonica in S e che su σ coincide con φ, e G è l'ordinaria funzione di Green [1] per il campo S.

Integrando per parti risulta:

$$u(x, y, z) = \mathrm{F}(x, y, z) - \frac{k}{4\pi}\int_{\mathrm{S}} \frac{d\mathrm{G}(x, y, z\,;\, \xi, \eta, \zeta)}{d\xi}\, \theta(\xi, \eta, \zeta)\, d\mathrm{S}.$$

[1] Con questa denominazione ho seguito Poincaré, Dini, Volterra, ecc.; qualche autore chiama invece funzione di Green quella che io indico con Γ e che chiamo *funzione preliminare di Green*. Sarebbe bene adottare una denominazione unica; come anche un simbolo unico per il parametro differenziale secondo, che alcuni autori indicano con Δ, altri con ∇^2, ecc. Speriamo che nel prossimo Congresso di Roma si risolvano queste piccole questioni.

Ora si può scrivere:

$$G = \frac{1}{r} - \Gamma ,$$

ove r è la distanza dei punti (x, y, z), (ξ, η, ζ) e Γ è la funzione preliminare di Green, la quale è armonica in S, e su σ coincide con $\frac{1}{r}$.

Sostituendo e notando che: $\frac{d\frac{1}{r}}{d\xi} = - \frac{d\frac{1}{r}}{dx}$, risulta:

$$u(x,y,z) = F(x,y,z) + \frac{k}{4\pi}\frac{d}{dx}\int_S \frac{\theta dS}{r} + \frac{k}{4\pi}\int_S \frac{d\Gamma(x,y,z\,;\,\xi,\eta,\zeta)}{d\xi}\theta dS , \tag{5}$$

che è la formola che volevamo ottenere. Essa corrisponde alla (3) della mia Nota citata.

2. Ciò premesso supponiamo che il volume S sia occupato da un solido elastico, isotropo, non soggetto a forze di massa.

Si tratta allora di determinare la deformazione di S, conoscendo la deformazione subita dalla superficie σ.

Denotando con u, v, w le componenti dello spostamento di un punto qualunque di S, dovranno essere soddisfatte, in S, le equazioni indefinite:

$$\Delta_2 u + k\frac{d\theta}{dx} = 0 \ , \ \Delta_2 v + k\frac{d\theta}{dy} = 0 \ , \ \Delta_2 w + k\frac{d\theta}{dz} = 0 , \tag{6}$$

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} , \tag{7}$$

ove k è una costante, e nei punti di σ le equazioni ai limiti:

$$u = \varphi_1 \ , \quad v = \varphi_2 \ , \quad w = \varphi_3 , \tag{8}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ essendo funzioni finite e continue, date nei punti di σ.

Il procedimento più spontaneo che ora si presenta, consiste nel riguardare provvisoriamente come nota la dilatazione cubica θ, e quindi determinare separatamente u, v, w mediante le equazioni (6), (8); sostituendo poi nella (7) si avrà un'equazione contenente la sola funzione incognita θ.

Ritenendo dunque nota la θ, le equazioni (6), (8) sono dello stesso tipo delle (4), perciò applicando la (5) avremo:

$$\left\{\begin{aligned} u(x, y, z) &= F_1(x, y, z) + \frac{k}{4\pi}\frac{d}{dx}\int_S \frac{\theta dS}{r} + \frac{k}{4\pi}\int_S \frac{d\Gamma}{d\xi}\theta dS \\ v(x, y, z) &= F_2(x, y, z) + \frac{k}{4\pi}\frac{d}{dy}\int_S \frac{\theta dS}{r} + \frac{k}{4\pi}\int_S \frac{d\Gamma}{d\eta}\theta dS \\ w(x, y, z) &= F_3(x, y, z) + \frac{k}{4\pi}\frac{d}{dz}\int_S \frac{\theta dS}{r} + \frac{k}{4\pi}\int_S \frac{d\Gamma}{d\zeta}\theta dS , \end{aligned}\right. \tag{9}$$

in cui F_1, F_2, F_3 sono le funzioni armoniche in S e che su σ coincidono rispettivamente con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

È chiaro che il sistema delle (6), (8), (7) è equivalente al sistema delle (9), (7).

Sostituendo nella (7) si ha:

$$\theta = \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dy} + \frac{dF_3}{dz} + \frac{k}{4\pi} \Delta_2 \int_S \frac{\theta dS}{r} +$$
$$+ \frac{k}{4\pi} \int_S \left(\frac{d^2\Gamma}{dx\, d\xi} + \frac{d^2\Gamma}{dy\, d\eta} + \frac{d^2\Gamma}{dz\, d\zeta} \right) \theta dS ;$$

ponendo:

$$\Phi = \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dy} + \frac{dF_3}{dz},$$

e applicando il teorema di Poisson, avremo l'equazione:

$$(10) \qquad (k+1)\,\theta = \Phi + \frac{k}{4\pi} \int_S \left(\frac{d^2\Gamma}{dx\, d\xi} + \frac{d^2\Gamma}{dy\, d\eta} + \frac{d^2\Gamma}{dz\, d\zeta} \right) \theta dS ,$$

che corrisponde alla (9) della mia Nota citata.

Se k è diverso da -1, la (10) può scriversi:

$$(11) \qquad \theta - \lambda \int_S \left(\frac{d^2\Gamma}{dx\, d\xi} + \frac{d^2\Gamma}{dy\, d\eta} + \frac{d^2\Gamma}{dz\, d\zeta} \right) \theta dS = \frac{1}{k+1} \Phi ;$$
$$\left(\lambda = \frac{k}{4\pi(k+1)} \right)$$

essa è un'equazione integrale, assai semplice, del tipo di Fredholm. Il nucleo è:

$$\frac{d^2\Gamma}{dx\, d\xi} + \frac{d^2\Gamma}{dy\, d\eta} + \frac{d^2\Gamma}{dz\, d\zeta},$$

funzione regolare, armonica in S, e simmetrica nelle variabili (x, y, z), (ξ, η, ζ).

Se invece $k = -1$, la (10) diventa:

$$(12) \qquad \int_S \left(\frac{d^2\Gamma}{dx\, d\xi} + \frac{d^2\Gamma}{dy\, d\eta} + \frac{d^2\Gamma}{dz\, d\zeta} \right) \theta dS = 4\pi\Phi ,$$

che non è altro che un'equazione integrale abeliana.

Il sistema delle (9), (11) [ovvero delle (9), (12)], è equivalente al sistema delle (9), (7), come si riconosce facilmente; perciò risolvendo la (11) [ovvero la (12)], e sostituendo nelle (9) avremo le funzioni u, v, w che risolvono la questione proposta.

3. L'equazione (11) ha una sola soluzione, purchè λ non sia esattamente un autovalore. A questo riguardo si può osservare che siccome il nucleo

della (11) è una funzione simmetrica, risulta senz'altro, da un noto teorema di Hilbert, che gli autovalori dovranno essere *reali*; inoltre conviene aggiungere che se per un valore determinato k_0 di k le equazioni (6), (7), (8) hanno una sola soluzione (cioè se le funzioni u, v, w sono identicamente nulle in S, quando $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono nulle su σ), allora il valore corrispondente λ_0 di λ non sarà certo un autovalore per la (11), cioè l'equazione omogenea:

$$\theta - \lambda_0 \int_S \left(\frac{d^2 \Gamma}{dx\, d\xi} + \frac{d^2 \Gamma}{dy\, d\eta} + \frac{d^2 \Gamma}{dz\, d\zeta} \right) \theta dS = 0 ,$$

non avrà alcuna soluzione differente da zero.

Infatti se quest'equazione avesse una soluzione θ_0 non identicamente nulla, le equazioni (9) darebbero per u, v, w dei valori differenti da zero, anche nel caso in cui $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, e quindi F_1, F_2, F_3 sono identicamente nulli, ciò che è contrario all'ipotesi.

È poi facile stabilire che se $k > -1$ le equazioni (6), (7), (8) hanno una sola soluzione [1].

Si può fare la dimostrazione adoperando le (6), ma è più semplice, e si è condotti in modo del tutto naturale al teorema, facendo una trasformazione, del resto ben nota, delle (6).

Denotiamo con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le metà delle rotazioni elementari della particella (x, y, z), cioè poniamo:

$$(13) \qquad \omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right) , \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) , \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right) ,$$

allora le (6) si scriveranno:

$$(14) \qquad \frac{k+1}{2}\frac{d\theta}{dx} + \frac{d\omega_2}{dz} - \frac{d\omega_3}{dy} = 0 , \quad \frac{k+1}{2}\frac{d\theta}{dy} + \frac{d\omega_3}{dx} - \frac{d\omega_1}{dz} = 0 , \ldots ,$$

che sono appunto le equazioni che ora adopereremo.

Supponiamo che le funzioni u, v, w siano nulle su σ: faremo vedere che saranno identicamente nulle in S.

Dalle (14) intanto risulta:

$$\int_S \Big\{ u \left(\frac{k+1}{2}\frac{d\theta}{dx} + \frac{d\omega_2}{dz} - \frac{d\omega_3}{dy} \right) + \\ + v \left(\frac{k+1}{2}\frac{d\theta}{dy} + \frac{d\omega_3}{dx} - \frac{d\omega_1}{dz} \right) + w(\cdots) \Big\} dS = 0,$$

[1] Nei lavori del Lauricella è supposto $k > -\frac{2}{3}$, e in quelli del Korn $k > 0$.

ossia, integrando per parti:

$$\int_S \left\{ \left(\frac{k+1}{2} \theta \frac{du}{dx} + \omega_2 \frac{du}{dz} - \omega_3 \frac{du}{dy} \right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{k+1}{2} \theta \frac{du}{dy} + \omega_3 \frac{dv}{dx} - \omega_1 \frac{dv}{dz} \right) + (\cdots) \right\} dS = 0 ,$$

ovvero, ricordando le (7), (14):

$$\int_S \left\{ \frac{k+1}{4} \theta^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \right\} dS = 0 .$$

Da quest' equazione si trae agevolmente che se $k+1>0$, le funzioni u, v, w risultano identicamente nulle in S, come si era enunciato.

4. Il metodo precedente è applicabile, com'è chiaro, al caso di un numero qualunque di variabili. In particolare, per 2 variabili, le equazioni corrispondenti delle (11), (12) sono:

$$(11') \quad \theta - \lambda \int_\sigma \left(\frac{d^2 \Gamma}{dx\, d\xi} + \frac{d^2 \Gamma}{dy\, d\eta} \right) \theta d\sigma = \frac{1}{k+1} \Phi \quad , \left(\lambda = \frac{k}{2\pi(k+1)} \right)$$

$$(12') \qquad \int_\sigma \left(\frac{d^2 \Gamma}{dx\, d\xi} + \frac{d^2 \Gamma}{dy\, d\eta} \right) \theta d\sigma = 2\pi \Phi ,$$

ove σ indica l'area piana che si considera.

Una volta risolta l'equazione (11') [ovvero la (12')], e quindi determinata la dilatazione θ, si avranno le componenti u, v dello spostamento dalle formole seguenti, analoghe alle (9):

$$(9') \quad \begin{cases} u(x, y) = F_1(x, y) + \dfrac{k}{2\pi} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_\sigma \theta \log \frac{1}{r} d\sigma + \frac{k}{2\pi} \int_\sigma \frac{d\Gamma}{d\xi} \theta d\sigma \\ v(x, y) = F_2(x, y) + \dfrac{k}{2\pi} \dfrac{d}{dy} \displaystyle\int_\sigma \theta \log \frac{1}{r} d\sigma + \frac{k}{2\pi} \int_\sigma \frac{d\Gamma}{d\eta} \theta d\sigma . \end{cases}$$

Si dimostra ancora, come dianzi, che per $k > -1$ l'equazione (11') ha una sola soluzione.

Abbiamo pertanto, nelle (9'), le formole che danno *le componenti dello spostamento longitudinale della piastra elastica piana σ, quando sul contorno son conosciuti gli spostamenti stessi*.

Osservazione. — Abbiamo accennato dianzi al teorema di Hilbert, secondo il quale gli autovalori di un'equazione integrale (3), il cui nucleo $f(x, y)$ è una funzione simmetrica, sono tutti reali.

Questo teorema è stato di poi dimostrato in modo più semplice da Schmidt e da Picard [1]. Orbene, osserverò che non occorrono neanche dimo-

[1] E. Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Functionen*, etc.; Inaugural-Dissertation (Göttingen, a. 1905); E. Picard, *Sur quelques applications des équations fonctionnelles de M. Fredholm* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t, XXII, a. 1906).

strazioni nuove, poichè basta prendere la dimostrazione della proprietà analoga, che è esposta ad es. nel trattato di A. Capelli: *Istituzioni di Analisi algebrica*, 3ª ediz., pag. 681 (Napoli, a. 1902), per il caso di un sistema di equazioni algebriche lineari:

$$x_i - \lambda \sum_1^n {}_k\, a_{ik}\, x_k = 0\,, \quad (i = 1\,, 2\,, \dots, n),$$

di cui l'equazione (3) può esser considerata come una immediata estensione, e cambiarvi semplicemente i segni $\sum_1^n {}_k$ in $\int_a^b$.

Si ha allora la dimostrazione seguente: supponiamo che per il valore λ_0 di λ l'equazione:

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b f(x\,, y)\, \varphi(y)\, dy = 0$$

abbia una soluzione differente da zero; moltiplichiamo quest'equazione per la funzione $\overline{\varphi}(x)$ coniugata di $\varphi(x)$, e poi integriamo rispetto ad x; avremo:

$$\int_a^b \varphi(x)\, \overline{\varphi}(x)\, dx - \lambda_0 \int_a^b \int_a^b f(x\,, y)\, \varphi(y)\, \overline{\varphi}(x)\, dx\, dy = 0\,.$$

Il 1° integrale è evidentemente positivo, inoltre nel coefficiente di λ_0 per ciascun termine $f(x\,,y)\, \varphi(y)\, \overline{\varphi}(x)\, dx\, dy$ esiste anche il termine $f(x.y)\, \varphi(x)\, \overline{\varphi}(y)\, dx\, dy$, che è coniugato del precedente essendo $f(y\,, x) = f(x\,, y)$, perciò la loro somma è reale. Il coefficiente di λ_0 è dunque reale, quindi il valore di λ_0 che soddisfa all'equazione precedente sarà necessariamente reale. Si conclude poi che saranno pure reali le autofunzioni.

Dalla precedente dimostrazione segue pure che *se il nucleo è una funzione alternata, cioè $f(y\,.x) = -f(x\,, y)$, gli autovalori sono numeri imaginari puri.*

Chimica — *Sul 1-2-metil-nafto-chinolo* [1]. Nota di G. Bargellini e S. Silvestri, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

In una Nota precedente è stato dimostrato che il cosidetto ossi-dimetil-naftolo (preparato per ossidazione del dimetil-naftolo con acido cromico in soluzione acetica) non è altro che un dimetil-nafto-chinolo. Ci sembrò allora interessante ricercare se questo nuovo metodo di preparazione dei chinoli potesse estendersi con buon successo ad altri composti.

A questo scopo abbiamo prima di tutto rivolta la nostra attenzione al 1-metil-2-naftolo del quale era già noto il chinolo corrispondente preparato da Fries e Hübner [2] facendo agire i vapori nitrosi sul metil-naftolo in soluzione eterea e decomponendo poi il chinitrolo formatosi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(2) Fries e Hübner, B. 39, 435.