ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Comunque non avendovi per il conglomerato granitico di Groppo del Vescovo la presenza delle argille scagliose, almeno per quanto ci è dato a vedere, pare a noi che difficilmente sia applicabile ad esso la felice ipotesi invocata dal Taramelli per altri graniti. Noi crediamo che una teoria sulla sua genesi, deve rispondere bene ai seguenti fatti:

1. il conglomerato è costituito di varie specie di rocce cristalline e sedimentarie;
2. i suoi elementi sono in prevalenza grossi e spesso non arrotondati;
3. intorno ai frammenti del conglomerato non esiste alcuna alterazione dovuta al calore di una roccia fusa in cui potessero essere stati inglobati;
4. infine in vicinanza del conglomerato granitico non esiste alcuna roccia eruttiva.

È evidente che i frammenti di rocce granitiche appartenenti al conglomerato sono stati staccati da un massiccio non molto distante da esso. Se questo massiccio abbia esistito prima della deposizione dell'Eocene o di una parte di esso, e sia poi stato ricoperto dall'Eocene, è un'ipotesi lecita ma non controllabile con l'osservazione, e perciò di poco valore.

A noi per ora basta di avere constatato i fatti che ci sembrano interessanti, e per corroborarli meglio daremo in una prossima Nota l'analisi microscopica delle varie rocce da noi raccolte nel conglomerato del Groppo del Vescovo, con alcune riproduzioni di sezioni sottili.

Matematica. — *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche.* Nota di FRANCESCO SEVERI, presentata dal Socio C. SEGRE.

La conoscenza abbastanza ampia che si possiede ormai delle funzioni algebriche di una e di due variabili, non permette di intuire sempre per analogia le corrispondenti proprietà per le funzioni di tre o più variabili, se si eccettuano alcuni teoremi, i quali, per la natura stessa delle dimostrazioni, si possono ritenere noti per varietà algebriche di dimensione qualunque. Sono tra questi, il teorema relativo all'unicità del sistema lineare completo cui appartiene una data funzione razionale dell'ente, il Restsatz, il teorema fondamentale dell'aggiunzione, ecc.

Altre proposizioni di geometria sopra una varietà, appariscono invece addirittura inattese. Basti citare qualche teorema in cui mi sono imbattuto in alcune ricerche sulle varietà, che mi propongo di esporre qui sommariamente, riservando gli sviluppi ad un altro lavoro.

Così ad esempio, mentre il genere aritmetico di una superficie non è legato ai caratteri del sistema canonico (grado e genere), il genere aritmetico di una varietà a tre dimensioni si può esprimere mediante il grado e il genere aritmetico del sistema canonico; mentre il genere aritmetico di una superficie non supera mai il genere geometrico, per una varietà a tre dimensioni il genere aritmetico può essere minore, uguale o maggiore rispetto al genere geometrico; mentre una superficie con un gruppo permutabile ∞^2 di trasformazioni birazionali (superficie di Picard), ha il genere geometrico diverso dall'aritmetico, una varietà di Picard a tre dimensioni (varietà con un gruppo permutabile ∞^3) ha i due generi tridimensionali uguali; ecc. ecc.

Tuttavia le ricerche che esporrò attorno alle varietà a tre dimensioni, lo studio di qualche esempio e alcune considerazioni generali sulle varietà di dimensione qualunque, permettono d'intravedere le proprietà più notevoli delle varietà superiori, e in particolare mostrano come le analogie più spiccate si ritrovino tra le varietà la cui dimensione ha la stessa parità. Così ad esempio, per le varietà a quattro dimensioni il genere aritmetico torna ad essere indipendente dai caratteri del sistema canonico.

Ma di queste analogie mi occuperò nel lavoro più esteso.

1. *Generi virtuali di una superficie — Caratteri di un sistema lineare.* Sulle superficie algebriche uno dei concetti più fecondi (dovuto al Noether) è quello relativo al genere virtuale di una curva. Similmente sopra una varietà algebrica V a tre dimensioni, si hanno da considerare i *generi virtuali, aritmetico e geometrico, di una superficie.*

Tralasciando di definire i generi di una superficie di cui si considerino come inesistenti alcune singolarità, ci fermeremo al caso di una superficie composta di due parti F, F_1. Se p_a, p'_a sono i generi aritmetici delle due parti e π il genere (virtuale) della curva ad esse comune, il genere aritmetico (virtuale) della superficie composta è

(1) $$x_a = p_a + p'_a + \pi \text{ (}^1\text{)}.$$

Quanto al genere geometrico (virtuale) della stessa superficie, esso è espresso da

(2) $$x_g = p_g + p'_a + \pi,$$

purchè però si ammetta che F appartenga ad un sistema continuo (al-

(1) Di questa formula trovasi un caso particolare al n. 4 *b*) della mia Nota: *Su alcune questioni di postulazione* (Rendiconti di Palermo, 1903): il caso cioè in cui F, F_1 costituiscano la completa intersezione di $r-2$ forme dello S_r. Ma la dimostrazione pel caso generale non è così semplice come lo potrebbe far supporre il fatto che il sig. Pannelli nella sua Nota: *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni* (questi Rendiconti, seduta del 6 maggio 1906), dichiara di averla omessa per brevità. La dimostrazione stessa si troverà (in generale per varietà qualunque) nel mio lavoro più esteso.

meno ∞^1) di grado > 0. Se della stessa proprietà gode anche F_1, si ha naturalmente

$$x_g = p_a + p'_g + \pi,$$

p_g, p'_g essendo i generi geometrici di F, F_1.

La formola (2) si deduce subito dalla (1), in virtù del teorema (di Castelnuovo-Enriques), che avrò occasione di richiamare più tardi, concernente l'irregolarità superficiale di V.

Dato su V un sistema lineare $|F|$, oltre al genere aritmetico di F (calcolato riguardando eventualmente come inesistenti alcune singolarità base), si hanno da considerare i caratteri virtuali seguenti del sistema $|F|$:

il « grado », cioè il numero delle intersezioni di tre superficie del sistema fuori della base assegnata;

il « genere », cioè il genere (virtuale) della curva comune a due superficie del sistema fuori della base assegnata.

Si può facilmente dare di questi caratteri definizioni che abbiano senso anche quando $|F|$ ha la dimensione 0 o 1, analogamente a ciò che si fa sulle superficie.

Si ottengono immediatamente le formole che esprimono il grado e il genere del sistema lineare $|F + F_1|$ somma di due altri $|F|, |F_1|$. Quanto al genere aritmetico del sistema somma, esso è dato dalla (1).

2. *Generi della varietà* V — *Le due irregolarità*. Sopra una varietà V, a tre dimensioni, si hanno anzitutto i generi considerati da Noether (¹) e cioè:

a) *Il genere geometrico tridimensionale* P_g: numero delle superficie canoniche linearmente indipendenti, od anche — sotto forma proiettiva, e supponendo la V, d'ordine n, immersa nella S_4 — numero delle forme aggiunte d'ordine $n - 5$ linearmente indipendenti. Il genere P_g è invariante rispetto a tutte le trasformazioni birazionali delle varietà (Nöther, Enriques).

b) *I caratteri del sistema canonico* (genere superficiale, genere e grado). Si può dare di essi una definizione aritmetica, considerandoli come caratteri delle superficie (virtuale, per $P_g = 0$) $F' - F$, ove F' è una superficie del sistema aggiunto ad $|F|$. Si ottengono allora tre invarianti $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$, corrispondenti rispettivamente al grado, genere, genere aritmetico di $F' - F$. Essi coincidono coi caratteri di Nöther quando V sia priva di superficie eccezionali, che entrano come parti fisse in $|F' - F|$, e quando la superficie canonica sia regolare. Sono invarianti relativi: l'effetto prodotto su essi dalle trasformazioni che introducono superficie eccezionali, è stato studiato dal

(¹) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischen Gebilde* (Mathematische Annalen, Bd. VIII).

Pannelli [1]. Veramente questi invarianti riduconsi a due soli distinti, perchè sussiste la relazione

$$2\Omega_1 - 2 = 3\Omega_0 ,$$

che si verifica facilmente [2].

Oltre gl'invarianti predetti si ha ancora:

c) Il genere aritmetico tridimensionale P_a: numero virtuale delle forme aggiunte d'ordine $n - 5$ linearmente indipendenti. Supposto che la V sia dotata di singolarità ordinarie, cioè una superficie doppia D, con una linea tripla per V e per D, con un numero finito di punti quadrupli per V e per la linea tripla e sestupli per D, le forme aggiunte a V soddisfano semplicemente alla condizione di passare per D. Detta $\varphi\,(l)$ la postulazione della D per le forme d'ordine l assai alto, il genere aritmetico di V viene espresso dalla formola

$$P_a = \binom{n-1}{4} - \varphi\,(n-5) .$$

Tra il genere aritmetico tridimensionale P_a *e gl'invarianti* $\Omega_0 , \Omega_1 , \Omega_2$ *— i quali coincidono rispettivamente col grado, col genere e col genere aritmetico del sistema canonico tracciato sulla varietà* V, *quando questa sia priva di superficie eccezionali — passa la relazione fondamentale*

$$(3) \qquad 2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4 \text{ , ovvero: } 4P_a = 2\Omega_2 - \Omega_0 + 6 \ [3]$$

La via che si presenterebbe più naturale per verificare la (3), sarebbe di esprimere la postulazione φ e gl'invarianti Ω, mediante i caratteri proiettivi della superficie doppia D; ma per quanto sia utile di possedere tali espressioni, a cui una ricerca un po' minuta deve condurre senza gravi difficoltà, non è così ch'io ho ottenuto la (3). Darò un cenno più sotto della via seguita, la quale ha il vantaggio di presentare la relazione numerica collegata ad un fatto geometrico. Contemporaneamente ne risulterà l'invarianza assoluta del genere aritmetico P_a, cioè dell'espressione $\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4$ [4].

Essendo invarianti i due generi tridimensionali, risulta pure invariante la differenza $P_g - P_a$, che si chiamerà *prima irregolarità* o *irregolarità tridimensionale* della varietà V.

(1) *Sopra gl'invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni*, ecc. (questi Rendiconti, seduta del 2 giugno 1906). Pel confronto col Nöther (quando V sia priva di superficie eccezionali) si ponga $\Omega_0 = p^{(4)}$, $\Omega_1 = p^{(3)}$, $\Omega_2 = p^{(1)}$, e pel confronto col Pannelli $\Omega_0 = \varDelta^{(3)}$, $\Omega_1 = \varDelta^{(4)}$, $\Omega_2 = \varDelta^{(1)}$. Il carattere $p^{(2)}$ di Nöther (o l'invariante $\varDelta^{(2)}$ del Pannelli) è uguale a $4\Omega_0 + 1$, e perciò è superfluo considerarlo.

(2) Pannelli, 1ª Nota citata, formola (23).

(3) Ero giunto da qualche tempo a questa relazione e l'avevo anche comunicata al prof. Enriques; ma occupato in altre ricerche e desideroso di completare gli studî che avevo intrapreso sulle varietà, ne avevo differito la pubblicazione.

(4) L'invarianza assoluta di quest'espressione trovasi pure dimostrata, seguendo una via ben diversa, nella 2ª Nota citata del sig. Pannelli.

L'irregolarità tridimensionale può essere anche negativa, cioè il genere aritmetico P_a *può essere maggiore del genere geometrico* P_g, come vedremo su esempi.

d) Un altro invariante assoluto della varietà V è stato introdotto recentemente dai signori Castelnuovo-Enriques [1]. Estendendo leggermente un teorema dimostrato da questi Autori, si può enunciare che « tutte le « superficie (irriducibili) tracciate sulla V, hanno la stessa irregolarità, appena « si tratti di superficie variabili entro sistemi continui di grado > 0 ». Orbene, l'irregolarità di queste superficie, che è poi uguale al *numero degli integrali semplici di 1ª specie appartenenti a* V, si chiamerà *seconda irregolarità* o *irregolarità superficiale* della varietà.

3. *Il teorema di Riemann-Roch sopra una varietà a tre dimensioni.* Sopra una varietà a tre dimensioni *non è possibile* assegnare per tutti i casi neppure una disuguaglianza tra la dimensione r di un sistema, i suoi caratteri n, π, p_a, i (grado, genere, genere aritmetico, indice di specialità) e il genere P_a della varietà: già lo si arguisce dal fatto che non è possibile assegnare una disuguaglianza sempre valida, tra la dimensione effettiva $P_g - 1$ del sistema canonico e la sua dimensione virtuale $P_a - 1$.

Si riesce però a dimostrare che:

Sopra una varietà algebrica a tre dimensioni V, *la dimensione* r *di un sistema lineare completo* $|F|$ *di superficie (anche riducibili), il quale si possa considerare come l'aggiunto di una superficie* G, *appartenente ad un sistema continuo di grado* > 0, *soddisfa alla disuguaglianza*

$$r \geq n - \pi + p_a - P_a + 2, \tag{4}$$

ove n, π, p_a *denotano rispettivamente il grado, il genere, il genere aritmetico di* $|F|$ *e* P_a *il genere aritmetico di* V. *Esistono inoltre sistemi* $|F|$ *per cui vale il segno* $=$.

Un sistema (completo) per cui vale l'eguaglianza, è p. es. quello contenente totalmente le sezioni di V, supposta priva di singolarità nello S_d, con le forme d'ordine l abbastanza alto. Si dimostra anzi che il sistema di queste sezioni è esso stesso completo; e da ciò si deduce la *postulazione di* V *per le forme d'ordine* l.

Il secondo membro della disuguaglianza (4) si deve considerare come la *dimensione virtuale* del sistema (non speciale) $|F|$.

Indicando con $\overline{p}_a$ *il genere aritmetico virtuale della superficie* G, *di cui* $|F|$ *è l'aggiunto, si trova pure*

$$r \geq \overline{p}_a - 1 + P_a. \tag{5}$$

[1] *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Annales de l'École normale de Paris, 1906).

In particolare si può scegliere un tal sistema $|F| = |G'|$ che in corrispondenza ad esso valga il segno $=$ in ambedue le espressioni (4), (5), sicchè insomma risulti:

(6) $$\overline{p}_a - 1 + P_a = n - \pi + p_a - P_a + 2.$$

Esprimendo i caratteri n, π, p_a di F in funzione dei caratteri analoghi di G e della superficie (virtuale) $G' - G$, dalla (6) si deduce la relazione fondamentale (3):

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4$$

enunciata al n. 2, *c*). E una volta stabilita questa relazione *si risale da essa alla* (6), *la quale risulta così dimostrata per ogni sistema aggiunto.*

L'invarianza del genere aritmetico segue dal fatto che P_a risulta il limite superiore delle espressioni invarianti $r - \overline{p}_a + 1$.

Dovendosi considerare come dimensione virtuale di un sistema di caratteri n, π, p_a, i, l'espressione

$$n - \pi + p_a - P_a + i + 2,$$

la

$$P_a - 1 = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 - P_a + 1 + 2$$

risulta la dimensione virtuale del sistema $|G' - G|$, cioè del sistema canonico (essendo $i = 1$ l'indice di specialità di $G' - G$). Dunque:

La relazione fondamentale (3) *esprime che il genere aritmetico di* V *è il numero virtuale delle superficie canoniche linearmente indipendenti.*

Della relazione $\omega_2 = \omega_1 - 1$ tra i due invarianti del sistema $|C' - C|$ sopra una superficie, può darsi notoriamente un'interpretazione analoga.

4. *Relazioni tra certe deficienze e le irregolarità della varietà.* Dalla (5) segue anzitutto agevolmente che:

La deficienza δ del sistema canonico segato sopra una superficie irriducibile G *dal proprio sistema aggiunto* $|G'|$, *non supera la somma delle due irregolarità q_1, q_2 della varietà, ed esistono sistemi per cui il limite superiore è raggiunto*

Ne segue che *una varietà d'irregolarità superficiale nulla* ($q_2 = 0$) *ha sempre il genere geometrico non inferiore all'aritmetico* ($q_1 = P_g - P_a \geq \delta \geq 0$).

L'irregolarità superficiale di una varietà V è legata all'esistenza su questa di sistemi continui completi non lineari di superficie algebriche. Si sa anzi che « ogni sistema continuo completo è costituito da ∞^i sistemi lineari distinti, ove $i \leq q_2$ » (Castelnuovo-Enriques).

Applicando un procedimento già usato con successo sulle superficie (Enriques, Severi), si dimostra facilmente che *ogni sistema continuo completo di superficie, tracciato su* V, *ha il sistema caratteristico completo*, donde segue come immediato corollario che:

La deficienza δ_1 del sistema caratteristico di un dato sistema lineare $|F|$, appartenente a V, non supera l'irregolarità superficiale della varietà, ed esistono sistemi per cui il limite è raggiunto.

Assai più riposta è invece la dimostrazione di un'ultima disuguaglianza, di cui manca l'analoga sulle superficie:

La deficienza δ_2 della serie lineare segata sopra una curva caratteristica di un sistema $|F|$ dal sistema $|2F|$, non supera la somma delle due irregolarità di V ($\delta_2 \leq q_1 + q_2$); e vi sono sistemi per cui vale l'uguaglianza.

Ne consegue che sopra una *varietà completamente regolare*, come lo spazio ordinario, per ogni sistema lineare di superficie si ha $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$.

5. ESEMPI. 1) *Varietà V delle coppie di punti di una superficie F e di una curva C.* — Ivi si ha un fascio Σ, identico a C, di superficie F_0 identiche ad F, ed una congruenza lineare π, identica ad F, di curve C_0 identiche a C e seganti le F_0 in un punto.

Una superficie canonica di V si ottiene aggiungendo alle superficie formanti entro Σ un gruppo canonico, la superficie riempita dalle ∞^1 curve che entro π dànno un ente canonico.

Essendo p_g, p_a, ω gl'invarianti di F e p il genere di C, *gl'invarianti di V hanno i valori*:

$$P_g = p_g p \;,\; \Omega_0 = 6(p-1)(\omega-1) \;,\; \Omega_1 = 9(p-1)(\omega-1)+1 \;,$$
$$\Omega_2 = 3(p-1)(\omega-1) + 2(p-1)p_a + 2p - 3 \;,\; P_a = (p-1)p_a + p \,.$$

E poichè gl'integrali doppi di 1ª specie appartenenti a V, provengono sia dagl'integrali doppi di F, come dalle combinazioni degl'integrali semplici di F e degl'integrali abeliani di C, così il numero di questi integrali vien dato da $p_g + p(p_g - p_a)$.

Calcolando la differenza tra il numero degli integrali doppi ed il numero degli integrali semplici di 1ª specie appartenenti a V, si trova precisamente:

$$\{p_g + p(p_g - p_a)\} - \{p + (p_g - p_a)\} = p(p_g - p_a) + p_a - p = P_g - P_a \,,$$

cioè *l'irregolarità tridimensionale di V è uguale alla differenza tra il numero degl'integrali doppi ed il numero degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti alla varietà.*

Quando la F sia regolare con $p_g = p_a > 0$ e la C razionale ($p = 0$), si ottiene *un esempio di varietà ad irregolarità superficiale nulla e ad irregolarità tridimensionale > 0.*

Nel caso in cui $p_g = p_a = p = 1$ si ha invece *un esempio di varietà ad irregolarità superficiale > 0 e ad irregolarità tridimensionale nulla.*

Nel caso in cui $p_g = p_a = 0$, $p > 0$ si ha *un esempio di varietà col genere aritmetico maggiore del geometrico* ($P_g = 0$, $P_a = p$).

2) *Varietà* V *delle terne di punti di una curva* C. — Ebbi già occasione di assegnare in una mia Nota la costruzione del sistema canonico di V ed il valore del genere geometrico P_g (¹). Se la curva ha il genere p

$$P_g = \binom{p}{3} \quad , \quad P_a = \binom{p}{3} - \binom{p}{2} + p \, ,$$

e anche in tal caso *l'irregolarità tridimensionale di* V *risulta uguale alla differenza tra il numero* $\binom{p}{2}$ *degl'integrali doppi e il numero* p *degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti alla varietà.*

Questo esempio e il precedente fanno presagire che lo stesso teorema valga per una varietà qualunque a tre dimensioni; ma la dimostrazione generale sarà molto difficile.

Osserverò infine che, quando $p = 3$, cioè quando V è una varietà di Picard (con un gruppo ∞^3) l'irregolarità tridimensionale è nulla ($P_g = P_a = 1$).

Chimica. — *Sopra una dimetil- difenil- esametilenimina* (²). Nota di G. Bargellini, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

Nello scorso anno, Henle (³) riducendo l'etere metilico dell'acido cinnamico con amalgama di alluminio ottenne l'etere dell'acido idrocinnamico e contemporaneamente due eteri (forse stereoisomeri) dell'ac. β-γ-difeniladipico:

$$C_6H_5 - CH = CH - COOCH_3$$

$$C_6H_5 - CH_2 - CH_2 - COOCH_3 \qquad \begin{array}{l} C_6H_5 - CH - CH_2 . COOCH_3 \\ \qquad\quad\;\; | \\ C_6H_5 - CH - CH_2 . COOCH_3 \end{array}$$

Questo raddoppiamento della molecola dei composti a doppio legame nella riduzione specialmente con amalgama di alluminio era già stato osservato nel 1896 da Harries e Eschenbach (⁴), i quali dimostrarono che il benzalacetone ridotto con amalgama di sodio e acido acetico si converte per la maggior parte in benzilacetone, mentre invece ridotto in soluzione eterea con amalgama di alluminio dà in prevalenza il 4-5-difenil- ottandione-2-7:

$$C_6H_5 - CH = CH - CO - CH_3$$

$$C_6H_5 - CH_2 - CH_2 - CO - CH_3 \qquad \begin{array}{l} C_6H_5 - CH - CH_2 - CO - CH_3 \\ \qquad\quad\;\; | \\ C_6H_5 - CH - CH_2 - CO - CH_3 \end{array}$$

(¹) *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. 38, 1903) nn. 9, 10.

(²) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(³) Henle A., 348, 16.

(⁴) Harries e Eschenbach, B. 29, 380.