ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 15 settembre 1907.

Matematica. — *Sulla integrazione dell'equazione* $\Delta^4 V = 0$. Nota del Corrispondente GIUSEPPE LAURICELLA.

Nella mia Nota: *Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche* (1) annunciavo, or sono due anni, di avere dimostrata l'esistenza dell'integrale dell'equazione $\Delta^4 V = 0$ per dati valori al contorno della funzione incognita e della sua derivata normale. Quella dimostrazione si fondava su di un *teorema di equivalenza*, il quale mostra che il problema enunciato equivale al problema dell'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti in superficie, in un caso speciale riguardo al valore del parametro di elasticità, il quale però non rientra in quelli di isotropia; e si fondava ancora su di un teorema già da diversi anni enunciato dai sigg. Cosserat (2), che io dimostravo per mezzo di ripetute *approssimazioni successive*.

Venuto a conoscenza dei risultati di Fredholm sulle *equazioni integrali* e sul *problema di Dirichlet*, pensai di profittarne per togliere dalla mia dimostrazione alcune restrizioni sulla natura del contorno del campo e delle funzioni arbitrarie, ed ancora per semplificare alcuni ragionamenti, che quel metodo di approssimazioni successive richiedeva; ed a tal uopo ritirai la mia Memoria manoscritta dalla redazione degli Annali di Matematica.

(1) Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIV, 1° sem., serie 5ª.

(2) Marcolongo, *Teoria dell'equilibrio dei corpi elastici*, pag. 239 (Manuali Hoepli).

Mentre ero dietro ad effettuare le dette modificazioni, riuscii a trovare una nuova dimostrazione diretta, analoga a quella di Fredholm relativa al *problema di Dirichlet* ed a quella mia relativa al problema dell'equilibrio di elasticità; sicchè abbandonai la vecchia dimostrazione, veramente laboriosa, e scrissi la nuova, la quale sarà quanto prima pubblicata.

In una Nota dello scorso anno, il Fredholm [1] dimostra che gli integrali delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, per dati spostamenti in superficie, sono funzioni meromorfe del parametro di elasticità. Questo importante risultato permette, in virtù del menzionato *teorema di equivalenza*, di dimostrare ancora con semplicità il teorema di esistenza dell'integrale dell'equazione $\Delta^4 V = 0$, applicando il metodo indiretto che avevo ideato dapprima.

Nella presente Nota espongo appunto questa dimostrazione (indiretta); e mostro, mediante un esempio, come il detto *teorema di equivalenza* possa servire a costruire effettivamente la funzione V, tutte le volte che si conoscono le formole di risoluzione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.

Potrei limitarmi ad applicare qui senz'altro l'enunciato teorema di Fredholm sull'elasticità; tuttavia credo opportuno riprodurre per disteso gli eleganti ragionamenti di Fredholm, partendo dalle mie equazioni funzionali dell'elasticità [2], al fine di aggiungere qualche utile dettaglio.

Il prof. Marcolongo in una recente Nota [3] ripete pure i ragionamenti di Fredholm, che estende ancora al caso dei campi infiniti, partendo da equazioni integrali, le quali coincidono appunto con le mie [4]; ma senza quei dettagli, che a me sembrano convenienti [5].

[1] *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité,* Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. 2, n. 28.

[2] Quelle del Fredholm mi sembrano meno semplici.

[3] *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla fisica-matematica,* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XVI, serie 5ª, 1° sem.

[4] Le formole, che suggeriscono tali equazioni, erano state da me ottenute, a un di presso nel modo accennato dal prof. Marcolongo nella sua Nota, nella mia *tesi di abilitazione* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, form. (8), pag. 87), dove me ne servivo per estendere il *metodo di Neumann* all'elasticità. Recentemente (v. *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica,* Il Nuovo Cimento, serie 5ª, vol. XIII) le ho dedotte, introducendo il concetto di *pseudo-tensioni*, per potere dimostrare che il determinante delle equazioni integrali (almeno nei casi di isotropia) è diverso da *zero*.

[5] Nella sua Nota il prof. Marcolongo dice che *è impossibile che il determinante delle equazioni integrali dell'elasticità nei casi di isotropia sia nullo.* Il Fredholm nella sua Nota non dice questo esplicitamente. Ad ogni modo tale verità non risulta dai ragionamenti del Fredholm, nè da quelli del Marcolongo. Similmente non si può asserire (a meno che non si faccia uso del concetto di *pseudo-tensioni* o di altri criteri) che quando il determinante è uguale a *zero*, ossia quando le equazioni integrali omogenee ammettono soluzioni diverse da *zero*, si hanno soluzioni *fondamentali* o *eccezionali*.

1. Indichiamo con σ una superficie chiusa, con S lo spazio finito da essa limitato, con n la normale nei punti di σ; e fissiamo per direzione positiva di n quella rivolta verso il campo S. Supponiamo poi che la superficie σ soddisfaccia alle seguenti condizioni:

1°. Ammetta un piano tangente determinato in ogni suo punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2°. Esista un numero fisso positivo α tale che, indicando con $\widehat{nn'}$ l'angolo formato dalle direzioni positive delle normali n, n' in due punti qualsiasi p, p' di σ e con r' il vettore $\overline{pp'}$, si abbia:

$$\widehat{nn'} < \alpha r'.$$

Riferiamo i punti dello spazio ad una terna di assi cartesiani ortogonali; e indichiamo con r il vettore che congiunge due punti qualsiasi dello spazio, le cui coordinate siano rispettivamente x, y, z ; ξ, η, ζ. Finalmente si ponga:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}, \quad \Delta^4 = \Delta^2(\Delta^2),$$

$$\frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\widehat{nx} + \frac{\partial}{\partial y}\cos\widehat{ny} + \frac{\partial}{\partial z}\cos\widehat{nz},$$

supponendo nella terza formola (derivata normale) che il punto (x, y, z) sia su σ e che n sia la normale in questo punto.

2. Osserviamo che, quando di una funzione V sono dati nei punti di σ i suoi valori e quelli della sua derivata normale, si possono subito ottenere i valori di $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ negli stessi punti di σ, supposto che queste derivate esistano. Infatti, considerato su σ un sistema ortogonale (α, β), si può scrivere:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\widehat{nx} + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\widehat{ny} + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\widehat{nz},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\widehat{\alpha x} + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\widehat{\alpha y} + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\widehat{\alpha z},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\widehat{\beta x} + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\widehat{\beta y} + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\widehat{\beta z};$$

ed in queste equazioni il determinante delle incognite $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ è uguale ad 1.

Viceversa se di una funzione V sono dati su σ i valori di $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$,

$\frac{\partial V}{\partial z}$, si possono subito determinare negli stessi punti di σ i valori di $\frac{dV}{dn}$ e, a meno di una costante, quelli di V.

Di qui segue che al problema di determinare una funzione V dei punti del campo S, la quale soddisfaccia alle equazioni:

$$(1)\quad (\text{nei punti di S})\ \Delta^4 V = 0\,,\quad (\text{nei punti di } \sigma)\ V = f_1(\alpha,\beta)\,,\ \frac{dV}{dn} = f_2(\alpha,\beta)\,,$$

con $f_1(\alpha,\beta)$, $f_2(\alpha,\beta)$ funzioni finite e continue, arbitrariamente date, delle quali la prima abbia le derivate prime finite e continue, si può sostituire l'altro problema di determinare una funzione V_1 dei punti del campo S, la quale soddisfaccia alle equazioni:

$$(1)_1 \left\{ \begin{array}{l} (\text{nei punti di S})\ \Delta^4 V_1 = 0\,, \\ (\text{nei punti di } \sigma)\ \frac{\partial V_1}{\partial x} = u_\sigma\,,\ \frac{\partial V_1}{\partial y} = v_\sigma\,,\ \frac{\partial V_1}{\partial z} = w_\sigma\,, \end{array} \right.$$

dove si è posto:

$$u_\sigma = \frac{\partial V}{\partial x}\,,\quad v_\sigma = \frac{\partial V}{\partial y}\,,\quad w_\sigma = \frac{\partial V}{\partial z}\,.$$

Infatti, determinato in un modo qualsiasi un integrale V_1 di queste equazioni, questo differirà dall'integrale V delle equazioni (1) per una costante additiva, la quale si potrà determinare tenendo conto del valore di $f_1(\alpha,\beta)$ in un punto qualsiasi di σ.

3. Se V_1 è integrale delle equazioni $(1)_1$, posto:

$$u = \frac{\partial V_1}{\partial \xi}\,,\quad v = \frac{\partial V_1}{\partial \eta}\,,\quad w = \frac{\partial V_1}{\partial \zeta}\,,\quad \theta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \Delta^2 V_1\,,$$

risulterà:

$$(1)_2 \left\{ \begin{array}{l} (\text{nei punti di S}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0\,,\ \Delta^2 v - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0\,,\ \Delta^2 w - \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0\,, \\ \Delta^2 \theta = 0\,, \end{array} \right. \\ (\text{nei punti di } \sigma)\ u = u_\sigma\,,\ v = v_\sigma\,,\ w = w_\sigma\,, \end{array} \right.$$

nelle quali $u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$ sono rispettivamente i valori nei punti di σ delle derivate prime rapporto a ξ, η, ζ di una medesima funzione.

Viceversa supponiamo che le funzioni u, v, w formino un sistema di integrali delle equazioni $(1)_2$, nelle quali $u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$ siano rispettivamente i valori nei punti di σ delle derivate prime rapporto a ξ, η, ζ di una medesima funzione $V_2(\xi,\eta,\zeta)$.

Posto:

$$\tau_1 = \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta}\,,\quad \tau_2 = \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\,,\quad \tau_3 = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\,,$$

risulterà dalle $(1)_2$:

$$(2) \qquad \frac{\partial \tau_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tau_3}{\partial \eta} = 0 \;,\quad \frac{\partial \tau_3}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau_1}{\partial \zeta} = 0 \;,\quad \frac{\partial \tau_1}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau_2}{\partial \xi} = 0\,;$$

e quindi esisterà una funzione $U(\xi, \eta, \zeta)$ tale che:

$$(3) \qquad \tau_1 = \frac{\partial U}{\partial \xi} \;,\quad \tau_2 = \frac{\partial U}{\partial \eta} \;,\quad \tau_3 = \frac{\partial U}{\partial \zeta}\,.$$

Dalle (2) si ha ancora, integrando per parti,

$$(4) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \int_S \left\{ u\left(\frac{\partial \tau_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tau_3}{\partial \eta}\right) + v\left(\frac{\partial \tau_3}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau_1}{\partial \zeta}\right) + w\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau_2}{\partial \xi}\right)\right\} dS = \\ &= \int_S (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)\, dS + \int_\sigma \{ u_\sigma(\tau_2 \cos\widehat{nz} - \tau_3 \cos\widehat{ny}) + \\ &\quad + v_\sigma(\tau_3 \cos\widehat{nx} - \tau_1 \cos\widehat{nz}) + w_\sigma(\tau_1 \cos\widehat{ny} - \tau_2 \cos\widehat{nx})\}\, d\sigma\,; \end{aligned} \right.$$

e dalle (3), pure integrando per parti,

$$\begin{aligned} &\int_\sigma \{ u_\sigma(\tau_2 \cos\widehat{nz} - \tau_3 \cos\widehat{ny}) + v_\sigma(\tau_3 \cos\widehat{nx} - \tau_1 \cos\widehat{nz}) + \\ &\qquad + w_\sigma(\tau_1 \cos\widehat{ny} - \tau_2 \cos\widehat{nx})\}\, d\sigma = \\ &= \int_\sigma \left\{ \frac{\partial V_2}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\cos\widehat{nz} - \frac{\partial U}{\partial z}\cos\widehat{ny}\right) + \frac{\partial V_2}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\cos\widehat{nx} - \frac{\partial U}{\partial x}\cos\widehat{nz}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial V_2}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\widehat{ny} - \frac{\partial U}{\partial y}\cos\widehat{nx}\right)\right\} d\sigma = \\ &= -\int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \xi}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \xi}\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \eta}\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right) - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \eta}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \zeta}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \zeta}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\right\} dS = \\ &= 0\,; \end{aligned}$$

quindi risulta dalla (4):

$$\int_S (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)\, dS = 0\,;$$

donde:

$$\text{(nei punti di S)} \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0\,,$$

ossia:

$$\text{(nei punti di S)} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \zeta} \;,\quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \;,\quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\,.$$

Di qui segue l'esistenza di una funzione $V_1(\xi, \eta, \zeta)$ tale che:

$$u = \frac{\partial V_1}{\partial \xi} \quad , \quad v = \frac{\partial V_1}{\partial \eta} \quad , \quad w = \frac{\partial V_1}{\partial \zeta} \; ;$$

e così otteniamo per la $V_1(\xi, \eta, \zeta)$, in virtù delle $(1)_2$,

$$\text{(nei punti di S)} \quad \Delta^4 V_1 = 0 \, ,$$

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} = u_\sigma \quad , \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = v_\sigma \quad , \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = w_\sigma \, .$$

Riepilogando si ha che *l'integrazione delle equazioni* $(1)_1$ *equivale all'integrazione delle equazioni* $(1)_2$.

4. È noto il teorema di unicità relativo alle equazioni (1), questo teorema allora varrà (a meno di una costante additiva) per le equazioni $(1)_1$, e, in virtù del precedente teorema di equivalenza, varrà ancora per le equazioni $(1)_2$, ossia si avrà che *il sistema integrale delle equazioni* $(1)_2$ *è pienamente determinato.*

5. Ciò premesso, si considerino le equazioni:

$$\text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 u + k \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad , \quad \Delta^2 v + k \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad \Delta^2 w + k \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0 \, ;$$

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad u = u_\sigma \quad , \quad v = v_\sigma \quad , \quad w = w_\sigma \, ,$$

nelle quali k rappresenta un parametro indipendente da ξ, η, ζ, e $u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$ sono tre funzioni *finite e continue* dei punti di σ.

Queste sono le equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, e dànno per $k \neq -1$:

$$\text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 \theta = 0 \, ,$$

la quale per $k = -1$ non è una conseguenza delle precedenti. Se noi alle precedenti equazioni aggiungiamo quest' ultima, otterremo le equazioni:

$$(5) \quad \begin{cases} \text{(nei punti di S)} \begin{cases} \Delta^2 u + k \dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad , \quad \Delta^2 v + k \dfrac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \, , \\ \Delta^2 w + k \dfrac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0 \quad , \quad \Delta^2 \theta = 0 \, ; \end{cases} \\ \text{(nei punti di } \sigma) \quad u = u_\sigma \quad , \quad v = v_\sigma \quad , \quad w = w_\sigma \, . \end{cases}$$

Queste equazioni, nel caso particolare in cui le funzioni finite e continue $u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$ *sono rispettivamente i valori nei punti di* σ *delle derivate prime rapporto a* ξ, η, ζ *di una medesima funzione* $V_2(\xi, \eta, \zeta)$, *coincidono per* $k = -1$ *con le* $(1)_2$.

È noto il teorema di unicità delle equazioni (5) per $k > -1$. Al § 4 abbiamo dimostrato questo teorema anche per $k = -1$; quindi *il sistema integrale delle equazioni* (5) *per* $k \geq -1$ *è pienamente determinato.*

Quest'ultimo teorema si può enunciare dicendo che *le equazioni* (5) *per* $k \geq -1$ *e per* $u_\sigma = v_\sigma = w_\sigma = 0$ *non ammettono soluzione alcuna diversa da zero* (soluzione *fondamentale* o *eccezionale*).

6. Ora si considerino le equazioni integrali:

$$(6)\begin{cases} \varphi(\alpha', \beta'; \lambda) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda) \,.\, \varphi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma = u_\sigma(\alpha', \beta'), \\ \psi(\alpha', \beta'; \lambda) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda) \,.\, \varphi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma = v_\sigma(\alpha', \beta'), \\ \chi(\alpha', \beta'; \lambda) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \Sigma X'''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda) \,.\, \varphi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma = w_\sigma(\alpha', \beta'), \end{cases}$$

nelle quali si è posto:

$$\lambda = \frac{k}{2+k},$$

$$X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda) = \frac{2}{2+k}\frac{d\frac{1}{r'}}{dn} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} =$$

$$= \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} + \lambda\left\{3\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2 - 1\right\}\frac{d\frac{1}{r'}}{dn},$$

$$Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r'}}{dn} = 3\lambda \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r'}}{dn},$$

. . . .

essendo r' il vettore congiungente i due punti $p \equiv (x, y, z) \equiv (\alpha, \beta)$, $p' \equiv (x', y', z') \equiv (\alpha', \beta')$ della superficie σ, ed n la normale in p.

Il sistema (6) è lo stesso del sistema $(1)_1$ al Cap. IV della mia citata Memoria del Nuovo Cimento, e, come fu ivi dimostrato, si possono ad esso applicare i noti teoremi di Fredholm sulle equazioni integrali.

Intanto dal fatto che per $k = \lambda = 0$ e per $u_\sigma = v_\sigma = w_\sigma = 0$ le equazioni (6) non ammettono soluzione alcuna diversa da *zero* [1], risulta che il determinante $D(\lambda)$ del sistema (6) per $k = \lambda = 0$ è diverso da *zero*; quindi esso non è identicamente nullo; e poichè rappresenta una funzione

[1] Cfr. ad es. mia cit. Memoria, Cap. III, § 4.

olomorfa di λ [1], si avrà che le radici dell'equazione:

$$(7) \qquad D(\lambda) = 0$$

nel caso che siano in numero infinito, ammettono sul piano della variabile complessa il solo punto limite $\lambda = \infty$.

La soluzione del sistema (6) avrà dunque la forma [1]:

$$\varphi(\alpha, \beta; \lambda) = \frac{\Phi(\alpha, \beta; \lambda)}{D(\lambda)} \quad , \quad \psi(\alpha, \beta; \lambda) = \frac{\Psi(\alpha, \beta; \lambda)}{D(\lambda)} ,$$
$$\chi(\alpha, \beta; \lambda) = \frac{X(\alpha, \beta; \lambda)}{D(\lambda)} ,$$

con $\Phi(\alpha, \beta; \lambda)$, $\Psi(\alpha, \beta; \lambda)$, $X(\alpha, \beta; \lambda)$ funzioni finite e continue dei punti di σ ed olomorfe rispetto a λ [1], che soddisfano alle equazioni integrali:

$$(6)_1 \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\alpha', \beta'; \lambda) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma X'_\sigma (\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \lambda) \,.\, \Phi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma = D(\lambda) \,.\, u_\sigma(\alpha', \beta'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

7. Ciò premesso, si ponga:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} P(\xi, \eta, \zeta; \lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma X'_\sigma \,.\, \Phi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma , \\ Q(\xi, \eta, \zeta; \lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \Sigma X''_\sigma \,.\, \Phi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma , \\ \ldots\ldots , \end{array} \right.$$

dove:

$$X'_\sigma = \frac{2}{2+k} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \quad , \quad Y'_\sigma = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} , \ldots .$$

Risulta facilmente:

$$\Theta(\xi, \eta, \zeta; \lambda) = \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} =$$

$$(9) \qquad = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{2}{2+k} \Sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \,.\, \Phi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma =$$

$$= \frac{1-\lambda}{2\pi} \int_\sigma \Sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \,.\, \Phi(\alpha, \beta; \lambda)\, d\sigma ;$$

[1] Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (Ofversit of Kongl. Vetenskap Akademiens Förhandlingar, 1900, n. 1; Stokholm).

e quindi si ha per qualunque valore finito di λ, ossia per $k \neq -2$,

$$(10) \qquad \text{(nei punti di S)} \quad \Delta^2 \Theta = 0 .$$

È facile poi verificare che si ha:

$$(11) \quad \text{(nei punti di S)} \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \mathrm{P} + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0 \,, \quad \Delta^2 \mathrm{Q} + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 0 \,, \\ \Delta^2 \mathrm{R} + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = 0 \,; \end{array} \right.$$

e risulta ancora per $k \neq -2$, in virtù della continuità su σ delle Φ, Ψ, X, in virtù delle (16) al Cap. II della mia cit. Memoria e delle $(6)_1$,

$$(12) \qquad \text{(nei punti di } \sigma) \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{P}(\alpha', \beta'; \lambda) = \mathrm{D}(\lambda)\, u_\sigma(\alpha', \beta') \,, \\ \mathrm{Q}(\alpha', \beta'; \lambda) = \mathrm{D}(\lambda) \,.\, v_\sigma(\alpha', \beta') , \ldots , \end{array} \right.$$

dove con $\mathrm{P}(\alpha', \beta'; \lambda), \ldots, \ldots$ si indicano rispettivamente i limiti verso cui tendono le funzioni $\mathrm{P}(\xi, \eta, \zeta; \lambda), \ldots, \ldots$, quando il punto (ξ, η, ζ) di S si avvicina indefinitamente al punto (α', β') di σ.

Dalle $(6)_1$, (8), (9) segue che le P, Q, R sono funzioni olomorfe di λ, finite e continue in tutto il campo S (i punti di σ inclusi); e che lo stesso accade delle loro derivate rapporto a ξ, η, ζ, della funzione Θ e delle sue derivate rapporto a ξ, η, ζ nei punti dell'interno di S (i punti di σ cioè al più esclusi). Risulta in particolare, sempre per $k \neq -2$, che nelle derivate di P, Q, R, Θ dei due primi ordini rapporto a ξ, η, ζ e di un ordine qualsiasi rapporto a λ, calcolate nei punti dell'interno di S, si può invertire l'ordine di derivazione. Di guisa che avremo dalle (10), (11), (12), derivando i volte rispetto a λ, per $k \neq -2$:

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \text{(nei punti di S)} \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \dfrac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial \lambda^i} + k \dfrac{\partial}{\partial \xi} \dfrac{\partial^i \Theta}{\partial \lambda^i} + i \dfrac{(2+k)^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \dfrac{\partial^{i-1} \Theta}{\partial \lambda^{i-1}} + \cdots = 0 \,, \\ \Delta^2 \dfrac{\partial^i \mathrm{Q}}{\partial \lambda^i} + k \dfrac{\partial}{\partial \eta} \dfrac{\partial^i \Theta}{\partial \lambda^i} + i \dfrac{(2+k)^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial \eta} \dfrac{\partial^{i-1} \Theta}{\partial \lambda^{i-1}} + \cdots = 0 \,, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Delta^2 \dfrac{\partial^i \Theta}{\partial \lambda^i} = 0 \,; \end{array} \right. \\ \text{(nei punti di } \sigma) \quad \dfrac{\partial^i \mathrm{P}}{\partial \lambda^i} = \dfrac{\partial^i \mathrm{D}}{\partial \lambda^i} u_\sigma \,, \quad \dfrac{\partial^i \mathrm{Q}}{\partial \lambda^i} = \dfrac{\partial^i \mathrm{D}}{\partial \lambda^i} v_\sigma \,, \ldots \end{array} \right.$$

8. Ora supponiamo che il valore finito λ' di λ sia radice di ordine $t+1$ dell'equazione (7), ossia che si abbia per $\lambda = \lambda'$:

$$(7)_1 \qquad 0 = \mathrm{D} = \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \lambda} = \cdots = \frac{\partial^t \mathrm{D}}{\partial \lambda^t} \,.$$

Allora si potrà scrivere:

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda')^{t+1} \,.\, D_1(\lambda) \quad , \quad D_1(\lambda') \neq 0.$$

Supponiamo che il valore λ' sia tale che per il corrispondente valore k' di k non esistano *soluzioni eccesionali* delle equazioni (5), ossia che λ', o il corrispondente k', non sia un *valore eccezionale*. Allora dalle (10), (11), (12), $(7)_1$ risulterà in tutto il campo S:

$$P(\xi\,,\eta\,,\zeta\,;\,\lambda') = Q(\xi\,,\eta\,,\zeta\,;\,\lambda') = R(\xi\,,\eta\,,\zeta\,;\,\lambda') = \Theta(\xi\,,\eta\,,\zeta\,;\,\lambda') = 0\,;$$

e quindi, facendo nelle (13) $i = 1$, otterremo ancora in tutto il campo S per $\lambda = \lambda'$:

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda} = \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} = 0\,.$$

Seguitando a fare uso delle (13), con riguardo alle $(7)_1$, otterremo così in tutto il campo S per $\lambda = \lambda'$:

$$\frac{\partial^i P}{\partial \lambda^i} = \frac{\partial^i Q}{\partial \lambda^i} = \frac{\partial^i R}{\partial \lambda^i} = \frac{\partial^i \Theta}{\partial \lambda^i} = 0\,; \quad (i = 0\,,1\,,2\,,\ldots\ldots,t)$$

e quindi si potrà scrivere:

$$(14) \qquad \begin{cases} P = (\lambda - \lambda')^{t+1}\,.\,P_1\,, & Q = (\lambda - \lambda')^{t+1}\,.\,Q_1\,, \\ R = (\lambda - \lambda')^{t+1}\,.\,R_1\,, & \Theta = (\lambda - \lambda')^{t+1}\,.\,\Theta_1\,, \end{cases}$$

con $P_1\,,Q_1\,,R_1\,,\Theta_1$ funzioni di $\xi\,,\eta\,,\zeta\,,\lambda$ della medesima natura di $P\,,Q\,, R\,,\Theta$.

Le funzioni $P_1\,,Q_1\,,R_1\,,\Theta_1$, come risulta dalle (9), (10), (11), (12) dividendo per $(\lambda - \lambda')^{t+1}$, soddisfano alle equazioni:

$$(13)_1 \quad \begin{cases} \text{(nei punti di S)} \begin{cases} \Delta^2 P_1 + k\dfrac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} = 0\,, \Delta^2 Q_1 + k\dfrac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = 0\,, \Delta^2 R_1 + k\dfrac{\partial \Theta_1}{\partial \zeta} = 0 \\ \Theta_1 = \dfrac{\partial P_1}{\partial \xi} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial \eta} + \dfrac{\partial R_1}{\partial \zeta}\,, \Delta^2 \Theta_1 = 0\,; \end{cases} \\ \text{(nei punti di } \sigma) \quad P_1 = D_1(\lambda)\,.\,u_\sigma\,,\; Q_1 = D_1(\lambda)\,.\,v_\sigma\,,\; R_1 = D_1(\lambda)\,.\,w_\sigma\,, \end{cases}$$

per qualunque valore finito di λ, ossia per qualunque valore di k diverso da -2.

Questo risultato vale anche quando, essendo il valore λ' *eccezionale*, le funzioni $P\,,Q\,,R\,,\Theta$ abbiano eventualmente la forma (14).

9. Da quanto precede risulta che *le funzioni*:

$$u(\xi\,,\eta\,,\zeta\,;\,\lambda) = \frac{P}{D}\,,\; v(\xi\,,\eta\,,\zeta\,;\,\lambda) = \frac{Q}{D}\,,\; w(\xi\,,\eta\,,\zeta\,;\,\lambda) = \frac{R}{D}$$

sono funzioni meromorfe di λ, *le quali, per tutti i valori di* k *per cui non hanno un polo, sono finite e continue in tutto il campo* S *(i punti di* σ *inclusi), hanno le derivate rispetto a* ξ, η, ζ *finite e continue in qualunque campo interno al campo* S, *e soddisfano alle equazioni* (5). *Esse possono avere poli solo per valori eccezionali di* k, *i quali, nel caso che siano in numero infinito, avranno per unico valore limite il valore* $k = -2$. *In ogni caso nessun valore eccezionale può appartenere al campo* $-1, \infty$.

Questo teorema, nel caso particolare in cui le $u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$ sono rispettivamente i valori nei punti di σ delle derivate prime rapporto a ξ, η, ζ di una medesima funzione, ci dimostra per $k = -1$ l'esistenza degli integrali regolari delle equazioni $(1)_2$; e così *risulta dimostrata l'esistenza dell'integrale regolare delle equazioni* (1).

10. Le condizioni poste in principio sulla natura della superficie σ si sono introdotte per dimostrare il precedente teorema relativo agli integrali delle equazioni (5). Qualunque sia la superficie σ, *tutte le volte che, in un modo qualsiasi, si conoscono le formole che dànno gli integrali delle equazioni* (5), *il procedimento generale, indicato nei* §§ 2, 3, *ci dà il mezzo di risolvere il problema dell'integrazione dell'equazione* $\Delta^4 V = 0$ *con quadrature.*

Così, ad esempio, nel caso della sfera di raggio R gli integrali delle equazioni (5) per $k = -1$ sono [1]:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma \left\{ \frac{u_\sigma}{r^3} - \frac{1}{2\varrho^2} \Sigma u_\sigma \int_0^\rho \varrho \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma ,$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma \left\{ \frac{v_\sigma}{r^3} - \frac{1}{2\varrho^2} \Sigma u_\sigma \int_0^\rho \varrho \frac{\partial^2}{\partial \xi \, \partial \eta} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

essendo l'origine degli assi nel centro della sfera e $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$.

Ponendo in queste formole:

$$u_\sigma = \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad v_\sigma = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad w_\sigma = \frac{\partial V}{\partial z}$$

ed eseguendo le opportune quadrature, si ritrova la nota formola che dà l'integrale V delle equazioni (1) per il caso della sfera [2].

[1] Lauricella, *Sulla deformazione di una sfera elastica*, ecc. (Annali di Matematica, vol. VI, serie 3ª).

[2] Volterra, *Osservazioni sulla Nota precedente del prof. Lauricella e sopra una Nota di analogo argomento dell'ing. Almansi* (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 31, 1895-96).