ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2º Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Sull'equazione del moto vibratorio delle membrane elastiche.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrispondente LEVI-CIVITA.

È notorio che l'equazione:

$$(1) \qquad \Delta_2 u + \lambda u = 0 \quad , \quad \left(\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)$$

fondamentale nello studio delle vibrazioni trasversali delle membrane elastiche piane e tese, ammette, se λ è una costante *negativa*, un solo integrale, regolare in un'area piana σ, che sul contorno di essa assume valori dati, mentre invece ciò non accade, in generale, se λ è una costante *positiva*; precisamente, esiste una successione di valori (positivi) di λ corrispondentemente ai quali esistono integrali u della (1) non identicamente nulli nell'area σ, ma nulli sul contorno.

Questi valori di λ e questi integrali u sono, da vari autori, rispettivamente denominati *valori eccezionali, valori singolari*, ecc. e *soluzioni eccezionali, soluzioni singolari (o fondamentali)*, ecc.; è però più breve chiamarli invece *autovalori* e *autofunzioni*.

È interessante allora, sovratutto dal punto di vista fisico, determinare il più piccolo autovalore λ_1 della (1), o almeno un confine, al disotto del quale non cadano autovalori della (1): infatti è noto che all'autovalore λ_1 corrisponde il suono più grave per il quale la membrana σ possa vibrare, per conseguenza, per un valore inferiore di λ, la membrana non darà suono alcuno.

Di tale questione si è occupato incidentalmente il Poincaré [1], assegnando (anche nel caso di tre dimensioni, e di condizioni ai limiti più generali) un confine inferiore per λ_1; però esso, che è inversamente proporzionale al quadrato del *diametro* (massima corda) del campo considerato, è poco approssimato, e inoltre per stabilirlo bisogna ricorrere a calcoli assai complicati.

Un'altra espressione più approssimata, è stata ottenuta con procedimento assai semplice dal Picard [2], il quale ha trovato un confine inferiore inversamente proporzionale al quadrato della larghezza di una striscia, compresa

[1] H. Poincaré, *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (American Journal of Mathematics, volume XII, a. 1890); *Sur les équations de la Physique mathématique* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. VIII, a. 1894).

[2] Cfr. ad es. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, pag. 26 (I° édition).

fra due rette parallele, contenente per intero il campo dato. È chiaro quindi che, per quanto grande sia il diametro di tale campo, questo confine inferiore rimane immutato, purchè però il campo sia sempre contenuto entro la striscia considerata, mentre invece, colla disuguaglianza del Poincaré, tale confine tenderebbe a zero.

In questa Nota mi propongo di assegnare un confine inferiore per λ_1, il quale è ancor più approssimato di quello ottenuto dal Picard; io lo stabilisco con due procedimenti completamente differenti: l'uno è fondato sopra un teorema di Schwarz, l'altro è una opportuna estensione del metodo stesso adoperato dal Picard.

Inoltre assegno pure un confine superiore per λ_1, e per la somma dei quadrati dei reciproci degli autovalori della (1). Infine estendo al caso di tre dimensioni i risultati ottenuti.

1. Consideriamo dapprima un'area rettangolare di lati a, b, poi poniamo l'origine delle coordinate in un vertice del rettangolo, l'asse x diretto secondo il lato a, e l'asse y secondo il lato b.

Per tale area Lamé (¹) ha determinato tutti gli autovalori e le autofunzioni della (1): queste ultime si hanno osservando che la funzione:

$$u = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

ove m, n sono interi, è evidentemente un'autofunzione della (1) purchè sussista l'eguaglianza:

$$\lambda = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

Ne segue che il minimo autovalore λ'_1 si ha per $m = n = 1$, ed ha per espressione:

$$\lambda'_1 = \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right). \tag{2}$$

Ciò premesso, consideriamo un'area σ, limitata da una curva chiusa s, e determiniamo un confine inferiore per il minimo autovalore λ_1 della (1).

Ricordiamo perciò il seguente teorema di Schwarz (²): « Se un'area è

(¹) Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, pag. 116 (Paris, a. 1852).

(²) Schwarz, *Integration der partiellen Differentialgleichung*, etc. (Gesammelte mathematische Abhandlungen, pag. 261; Berlin, a. 1890). Un'altra dimostrazione, assai semplice, di tale teorema è stata data recentemente dal Picard nella sua Memoria: *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M. Fredholm* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXII, a. 1906). Tale teorema, fisicamente, esprime che, al rimpiccolire della membrana, diminuisce il *periodo* della vibrazione corrispondente al contenuta all'interno di un'altra, il più piccolo autovalore della prima è maggiore del più piccolo autovalore della seconda ». Osserviamo poi che chiamando a, b i lati di un rettangolo contenente nel suo interno l'area σ, avremo, dal teorema di Schwarz: $\lambda_1 > \lambda'_1$, cioè, per la (2):

$$\lambda_1 > \pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right), \tag{3}$$

che è la diseguaglianza che volevamo stabilire.

Supponendo ad es. $a > b$ e facendo crescere indefinitamente a, si deduce:

$$\lambda_1 > \frac{\pi^2}{b^2},$$

che non differisce sostanzialmente dalla diseguaglianza del Picard.

Quella del Poincaré è invece:

$$\lambda_1 > \frac{24}{7D^2},$$

ove D è il diametro dell'area σ.

Considerando ora un rettangolo di lati a_1, b_1 contenuto all'interno di σ, si ha, dal teorema di Schwarz:

$$\lambda_1 < \pi^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}\right), \tag{4}$$

abbiamo così un confine superiore per λ_1.

Applichiamo ad es. le (3), (4) al caso di un cerchio di raggio R. Possiamo porre: $a = b = 2R$ ed $a_1 = b_1 = R\sqrt{2}$, quindi avremo:

$$\frac{\pi^2}{R^2} > \lambda_1 > \frac{\pi^2}{2R^2},$$

cioè:

$$\frac{9{,}86}{R^2} > \lambda_1 > \frac{4{,}93}{R^2}.$$

Il valore esatto di λ_1 si ha osservando che gli autovalori, nel caso del cerchio, soddisfano, com'è noto, alle equazioni: $J_n(\sqrt{\lambda}R) = 0$, ove J_n indica

---

suono più grave che essa può emettere, e quindi cresce l'*altezza* di tale suono; sotto questa forma il teorema è pressochè intuitivo, e notissimo nella fisica sperimentale e nella musica, sovratutto nel caso di una dimensione (corde sonore).

la funzione di Bessel d'ordine n; la più piccola radice si ha per $n=0$ e vale (1) 2,40, perciò:

$$\lambda_1 = \frac{(2,4)^2}{R^2} = \frac{5,76}{R^2};$$

si vede quindi che questo valore è abbastanza prossimo al confine inferiore dianzi trovato.

A proposito del cerchio, ricorderemo ancora che da una tabella costruita da Lord Rayleigh (2), risulta che fra tutte le membrane aventi la stessa area, e, s'intende, costituzione fisica, il minimo valore di λ_1 compete alla membrana circolare; sarebbe interessante stabilire questa proprietà in modo rigoroso, però pare che la dimostrazione presenti gravi difficoltà.

2. Dedurremo ora la (3) senza ricorrere al teorema di Schwarz, ma estendendo convenientemente il metodo seguito dal Picard per ottenere la sua diseguaglianza.

Intanto essendo λ_1 il minimo autovalore della (1), è chiaro che per $\lambda < \lambda_1$ sussisterà il teorema di unicità per l'equazione (1); orbene noi troveremo un confine inferiore per λ_1 esaminando appunto, in modo diretto, in quali casi sarà valido per la (1) il teorema di unicità.

Dalla (1) risulta:

$$\int_\sigma u(\Delta_2 u + \lambda u)\, d\sigma = 0,$$

cioè, integrando per parti, e ricordando che sul contorno s la funzione u si annulla:

$$\int_\sigma \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 - \lambda u^2\right] d\sigma = 0,$$

quest'eguaglianza, ben nota, mostra intanto che, se λ è negativo, allora sussiste certo il teorema di unicità.

Supponiamo ora λ positivo, e indichiamo con φ, ψ due funzioni continue qualunque di x, y; allora avremo identicamente, ricordando l'equazione precedente:

$$\int_\sigma \left\{\left[\left(\frac{du}{dx} + \varphi u\right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \psi u\right)^2\right] - \left[\varphi \frac{du^2}{dx} + \psi \frac{du^2}{dy} + \varphi^2 u^2 + \psi^2 u^2 + \lambda u^2\right]\right\} d\sigma = 0,$$

(1) Cfr. ad es. Lord J. Rayleigh, *The theory of sound*, vol. I, pag. 330 (2 edition, London, a. 1884).

(2) Op. cit., pag. 345.

ovvero ancora, integrando per parti:

$$\int_\sigma \left\{ \left[\left(\frac{du}{dx} + \varphi u\right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \psi u\right)^2 \right] + \right.$$
$$\left. + u^2 \left[\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} - \varphi^2 - \psi^2 - \lambda \right] \right\} d\sigma = 0 .$$

Se ora è possibile determinare le funzioni φ, ψ in guisa che siano continue in tutta l'area σ, e che inoltre si abbia:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} - \varphi^2 - \psi^2 - \lambda > 0 ,$$

l'eguaglianza precedente mostra che sussisterà, per l'area σ, il teorema di unicità.

Poniamo: $\lambda = \alpha^2 + \beta^2$, ove α, β sono quantità positive; avremo:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} - \varphi^2 - \psi^2 > \alpha^2 + \beta^2 ;$$

si può soddisfare a questa diseguaglianza scegliendo le funzioni φ, ψ in modo che:

$$\frac{d\varphi}{dx} - \varphi^2 > \alpha^2 , \quad \frac{d\psi}{dy} - \psi^2 > \beta^2 ,$$

e inoltre è lecito supporre che φ sia funzione della sola x, e ψ della sola y.

Possiamo sostituire queste diseguaglianze colle seguenti:

$$\frac{d\varphi}{dx} - \varphi^2 = \alpha_1^2 \quad , \quad \frac{d\psi}{dy} - \psi^2 = \beta_1^2 ,$$

α_1, β_1 essendo costanti rispettivamente maggiori di α, β, ma prossime ad esse quanto si vuole; si deduce così:

$$\varphi = \alpha_1 \operatorname{tang}(\alpha_1 x + C_1) \quad , \quad \psi = \beta_1 \operatorname{tang}(\beta_1 y + C_2) ,$$

C_1, C_2 essendo costanti arbitrarie.

Scegliendo opportunamente queste costanti, si può far in modo che la funzione φ resti continua in ogni intervallo dato, compreso fra due parallele all'asse y, la cui distanza è minore di $\dfrac{\pi}{\alpha_1}$, e che la funzione ψ resti continua in ogni intervallo dato, compreso fra due parallele all'asse x, la cui distanza è minore di $\dfrac{\pi}{\beta_1}$. Siccome poi α_1, β_1 sono prossime quanto si vuole ad α, β, si può concludere che, per ogni area contenuta nel rettangolo determinato da una striscia parallela all'asse y di larghezza minore di $\frac{\pi}{\alpha}$, e da una striscia parallela all'asse x di larghezza minore di $\frac{\pi}{\beta}$, vale il teorema di unicità.

Chiamando rispettivamente a, b le larghezze di queste striscie, si ha dunque:

$$a < \frac{\pi}{\alpha} \quad , \quad b < \frac{\pi}{\beta} ,$$

quindi:

$$\lambda < \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) .$$

Se dunque è soddisfatta questa condizione, vale, per la (1), il teorema di unicità. Tale enunciato non differisce sostanzialmente da quello espresso dalla (3).

È poi chiaro che questa proprietà vale qualunque sia l'orientazione del rettangolo, e quindi delle due strisce (perpendicolari) che lo determinano.

3. Vediamo ora di determinare un confine superiore per la somma dei quadrati dei reciproci degli autovalori della (1).

Indicando con $G(x, y; \xi, \eta)$ la funzione di Green relativa all'area σ, si deduce dalla (1), applicando la formola di Green, e ricordando che la funzione u si annulla sul contorno:

$$2\pi u(x, y) = \lambda \int_\sigma G(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta ;$$

questa è, secondo le denominazioni moderne, una *equazione integrale omogenea*, il cui *nucleo* è la funzione $\frac{1}{2\pi} G(x, y; \xi, \eta)$, la quale notoriamente è simmetrica e positiva nell'area σ.

Applicando ora una proprietà stabilita da E. Schmidt [1], relativamente alle equazioni integrali omogenee, avremo, denotando con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ i successivi autovalori della (1), disposti per ordine di grandezza crescente:

$$\sum_1^\infty{}_i \frac{1}{\lambda_i^2} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_\sigma \int_\sigma [G(x, y; \xi, \eta)]^2\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy . \tag{5}$$

Consideriamo un cerchio σ_1, contenente l'area data σ, e chiamiamo $G_1(x, y; \xi, \eta)$ la funzione di Green relativa a quest'area; allora è noto, del resto si riconosce subito, che si avrà:

$$G(x, y; \xi, \eta) < G_1(x, y; \xi, \eta) ,$$

per tutte le posizioni dei punti $(x, y), (\xi, \eta)$ entro σ.

[1] E. Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Functionen*, etc. (Inaugural-Dissertation, Göttingen, a. 1905).

Se ne deduce:

$$\int_\sigma G^2\, d\xi\, d\eta < \int_\sigma G_1^2\, d\xi\, d\eta < \int_{\sigma_1} G_1^2\, d\xi\, d\eta .$$

Ora chiamando R il raggio di σ_1, è facile vedere che:

$$G_1 < \log\frac{1}{r} - \log\frac{1}{2R},$$

ove r è la distanza dei punti $(x, y), (\xi, \eta)$; perciò:

$$\int_\sigma G^2\, d\xi\, d\eta < \int_{\sigma_1}\left(\log\frac{2R}{r}\right)^2 d\xi\, d\eta .$$

Denotando con ϱ il raggio vettore che dal centro del cerchio va al punto (ξ, η), si riconosce facilmente che:

$$\int_{\sigma_1}\left(\log\frac{2R}{r}\right)^2 d\xi\, d\eta < \int_{\sigma_1}\left(\log\frac{2R}{\varrho}\right)^2 d\xi\, d\eta,$$

quindi:

$$\int_\sigma G^2\, d\xi\, d\eta < \int_0^R\int_0^{2\pi}\left(\log\frac{2R}{\varrho}\right)^2 \varrho\, d\varrho\, d\theta = 2\pi R^2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}(\log 2)^2\right],$$

e sostituendo nella (5):

$$\sum_1^\infty{}_i \frac{1}{\lambda_i^2} < \frac{R^2}{4\pi}\left[\frac{1}{2} + \log 2 + (\log 2)^2\right]\sigma, \tag{6}$$

la quale ci dà il confine superiore richiesto.

4. I risultati stabiliti precedentemente si estendono senza difficoltà ai campi a tre dimensioni, in cui l'equazione (1), ove ora $\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, si presenta pure nello studio dei moti vibratori.

Nel caso di un parallelepipedo rettangolo di spigoli a, b, c, Lamé ha pure determinato tutti gli autovalori e le autofunzioni della (1): in particolare, il minimo autovalore λ_1' è espresso da [1]:

$$\lambda_1' = \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Si abbia ora un solido S, limitato da una superficie chiusa σ, e cerchiamo un confine inferiore e un confine superiore per il minimo autovalore λ_1 relativo ad S.

Basta considerare un parallelepipedo rettangolo contenente nel suo interno il solido S, e un un altro che sia contenuto in S; se a, b, c ; a_1, b_1, c_1

[1] Lamé, op. cit., pag. 176.

sono rispettivamente gli spigoli di tali parallelipipedi, applicando il teorema di Schwarz, che vale pure per corpi a tre dimensioni, risulterà:

$$\pi^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c^2}\right)>\lambda_1>\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Ad es. nel caso di una sfera di raggio R, si può porre: $a=b=c=2\mathrm{R}$, ed $a_1=b_1=c_1=\frac{2}{3}\mathrm{R}\sqrt{3}$, e si ottiene così:

$$\frac{9\pi^2}{4\mathrm{R}^2}>\lambda_1>\frac{3\pi^2}{4\mathrm{R}^2}.$$

È inoltre chiaro che le considerazioni dei nn 2 e 3 sono senz'altro estendibili anche al caso di tre dimensioni. In particolare si trova che la diseguaglianza corrispondente alla (6) è:

$$\sum_1^\infty{}_i\frac{1}{\lambda_i^2}<\frac{1}{16\pi^2}\left(4\pi\mathrm{R}\,.\,\mathrm{S}+\frac{1}{4\mathrm{R}^2}\mathrm{S}^2-\frac{32\pi^2}{15}\frac{\mathrm{R}_1^5}{\mathrm{R}}\right),$$

ove R è il raggio di una sfera contenente il corpo S, ed R_1 il raggio di una sfera contenuta in S.

Più semplicemente, ma con minor approssimazione, il secondo membro può esser sostituito da $\frac{41}{180}\mathrm{R}^4$.

Fisica. — *Potenziali esplosivi in presenza di diaframmi* (1). Nota di Lavoro Amaduzzi, presentata dal Socio A. Righi.

1. La scarica elettrica è ben lontana ancora dal trovare una spiegazione piena e soddisfacente. In particolare la scarica per scintilla presenta difficoltà non piccole a chi voglia metterne in rilievo le intime modalità, perchè è difficile raccogliere in una ipotesi sintetica i troppo numerosi e svariati fatti che sul conto della scintilla vennero osservati.

Così, secondo la teoria di J. J. Thomson, che va per la maggiore e che tuttavia non aspira ad essere completa ed esauriente, la scarica sarebbe funzione della pressione, della distanza esplosiva, del libero medio percorso degli ioni, ed indipendente invece dalla temperatura e dalla natura degli elettrodi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Bologna, diretto dal sen. prof. Augusto Righi.