ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Fisica matematica. — *Traiettorie e onde luminose in un mezzo isotropo qualunque.* Nota di ANTONIO GARBASSO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

§ 1. Il problema risolto in questa Nota è quello di determinare le forme dei raggi e delle superficie d'onda della luce, per uno spazio a un numero qualunque di dimensioni, nel quale l'indice di rifrazione sia dato come funzione delle coordinate.

Secondo il principio di Fermat dovrà aversi

$$\delta \int_1^2 n ds = 0 ,$$

quando l'integrale sia preso fra due limiti fissi; se è

$$ds^2 = \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^r {}_\tau \, a_{\sigma\tau} \, dp_\sigma \, dp_\tau ,$$

vengono dunque le condizioni

$$(1) \qquad \frac{\partial n}{\partial p_\varrho} + \frac{n}{2} \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} p'_\sigma \, p'_\tau - \frac{d}{ds} \sum_1^r {}_\sigma \, n \, a_{\varrho\sigma} \, p'_\sigma = 0 ,$$

$$[\varrho = 1 \,.\, 2 \ldots r]$$

nelle quali

$$p'_\sigma = \frac{dp_\sigma}{ds} .$$

Le (1) furono da me stabilite in un lavoro recente, almeno per il caso particolare delle coordinate ortogonali [1].

Ora il prof. V. Volterra ha avuto la cortesia di farmi osservare che le dette equazioni si riducono in più modi alla forma di quelle della dinamica.

Se per esempio si pone

$$\left\{ \begin{aligned} ds &= n\, du , \\ \dot{p}_\sigma &= \frac{dp_\sigma}{du} , \\ \mathrm{T} &= \frac{1}{2} \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^r {}_\tau \, a_{\sigma\tau} \, \dot{p}_\sigma \, \dot{p}_\tau , \\ \mathrm{U} &= \frac{1}{2} n^2 , \end{aligned} \right.$$

[1] A. Garbasso (Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino (2), LVIII, 1906, pag. 1).

risulta

$$\frac{d}{du}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\rho} - \frac{\partial T}{\partial p_\rho} - \frac{\partial U}{\partial p_\rho} = 0 \ (^1).$$

Ancora più interessante è un altro procedimento, proprio anche del Volterra, che permette di arrivare in fondo senza che si cambi la variabile indipendente. Ponendo

$$\left\{\begin{aligned} q_\sigma &= \sum_1^r{}_\tau\, n a_{\sigma\tau}\, p'_\tau, \\ (T) &= \sqrt{\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau\, b_{\sigma\tau}\, q_\sigma\, q_\tau} \ (^2) \\ H &= (T) - n, \end{aligned}\right.$$

si ottiene

$$\frac{dq_\rho}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial p_\rho},$$

mentre è anche

$$\frac{dp_\rho}{ds} = \frac{\partial H}{\partial q_\rho}.$$

In questa Nota io applico una terza trasformazione, distinta dalle precedenti, la quale consiste nel porre

$$ds = \frac{dt}{n};$$

dal punto di vista analitico non si guadagna manifestamente nulla di essenziale, ma dal punto di vista fisico si ha il vantaggio di mettere il *tempo* in evidenza.

Facciamo intanto

$$\dot{p}_\sigma = \frac{dp_\sigma}{dt},$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau\, n^2 a_{\sigma\tau}\, \dot{p}_\sigma\, \dot{p}_\tau,$$

(1) Questa trasformazione è analoga ad altra, indicata dall'Appell (C. R., XCVI, 1883, pag. 689) e segnalatami pure dal prof. Volterra, relativa al problema del filo flessibile.

(2) In questa formola è

$$b_{\sigma\tau} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{\sigma\tau}},$$

ove con Δ si indichi il determinante delle r^2 grandezze $a_{\sigma\tau}$.

e le (1) assumeranno la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\varrho} - \frac{\partial T}{\partial p_\varrho} = 0\,. \tag{2}$$

$$[\varrho = 1\,.\,2 \ldots r]\,.$$

D'altra parte, se si scrive

$$q_\sigma = \sum_1^r{}_\tau\, n^2\, a_{\sigma\tau}\, \dot{p}_\tau\,, \tag{*}$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{b_{\sigma\tau}}{n^2}\, q_\sigma\, q_\tau\,,$$

le (2) forniscono

$$\frac{dq_\varrho}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_\varrho}\,, \qquad [\varrho = 1\,.\,2 \ldots r] \tag{3}$$

mentre la definizione (*) dà subito

$$\frac{dp_\varrho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\varrho}\,. \qquad [\varrho = 1\,.\,2 \ldots r] \tag{3'}$$

Per le (2) le equazioni della propagazione della luce si riducono un'altra volta alla forma di Lagrange, mentre per le (3) e (3') assumono nuovamente la forma canonica di Hamilton.

§ 2. Senza altri calcoli potremo dunque applicare alla nostra quistione il teorema di Jacobi [1], e cioè:

« Se W è una soluzione completa della

$$-h + \frac{1}{2}\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{b_{\sigma\tau}}{n^2}\frac{\partial W}{\partial p_\sigma}\frac{\partial W}{\partial p_\tau} = 0\,, \tag{4}$$

« e si indicano con

$$\alpha_1\,.\,\alpha_2 \ldots \alpha_{r-1}$$

« le sue costanti arbitrarie, le equazioni della propagazione potranno met-
« tersi sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varrho} &= \alpha'_\varrho\,, \\ -t + \frac{\partial W}{\partial h} &= -t_0\,, \end{aligned}\right. \qquad [\varrho = 1\,.\,2 \ldots (r-1)] \tag{5}$$

« dove le α'_ϱ e la t_0 rappresentano delle nuove costanti ».

[1] La possibilità di ricondurre il problema del miraggio alla integrazione di un'equazione del tipo di Jacobi fu già risconosciuta dell'Appell. Egli si occupa però delle trajettorie e non dell'onda; si veda in proposito: *Traité de Mécanique rationelle*, volume II, pag. 43 e seguenti.

Le prime $r - 1$ fra le (5) danno subito il raggio, la

$$-t + \frac{\partial W}{\partial h} = -t_0$$

è una superficie mobile, che taglia di mano in mano la traiettoria nel punto dove arriva la luce. Eliminando fra le (5) le $r - 1$ costanti α_ρ, si otterrà la superficie dell'onda luminosa.

§ 3. Come esempio del metodo, proviamoci a fare

$$n = \frac{1}{a + bx},$$

e, poichè il fenomeno deve essere di rivoluzione intorno all'asse x, limitiamo il nostro calcolo al piano (x, y).

Viene

$$W = \alpha y + \frac{1}{b}\Bigg[\sqrt{2h - \alpha^2 (a + bx)^2} - \\ - \sqrt{2h} \log \frac{\sqrt{2h} + \sqrt{2h - \alpha^2 (a + bx)^2}}{a + bx}\Bigg],$$

e le (5) forniscono

$$y - \frac{1}{b\alpha}\Big[\sqrt{2h} - \sqrt{2h - \alpha^2 (a + bx)^2}\Big] = \alpha',$$

$$-t - \frac{1}{b\sqrt{2h}} \log \frac{\sqrt{2h} + \sqrt{2h - \alpha^2 (a + bx)^2}}{a + bx} = -t_0.$$

Poniamo adesso

$$2h = 1,$$

e mettiamo per condizione che x, y e t si annullino contemporaneamente, verrà

$$y + \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 (a + bx)^2}}{\alpha b} = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 a^2}}{\alpha b},$$

$$\frac{a}{a + bx} \, \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2 (a + bx)^2}}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2 a^2}} = e^{-bt}.$$

La prima di queste equazioni individua la traiettoria: è una circonferenza di cerchio.

Eliminando α si ottiene

$$y^2 + \Big[x - \frac{a}{2b}(e^{bt} + e^{-bt} - 2)\Big]^2 = \frac{a^2}{4b^2}(e^{bt} - e^{-bt})^2.$$

La superficie dell'onda è dunque quella di una sfera, che si va allargando, mentre il suo centro si sposta lungo l'asse delle x.

Se diciamo X la x del centro, e R il raggio dell'onda, viene subito

$$\frac{dX}{dt} = b\,R\,,$$

e cioè: la velocità di traslazione del centro si mantiene proporzionale al raggio.

Se b tende a zero, l'onda si riduce a

$$x^2 + y^2 = a^2\,t^2\,,$$

come del resto si poteva prevedere.

Meccanica. — *Integrazione dell'equazione funzionale che regge la caduta di una sfera in un liquido viscoso.* Nota del prof. Giuseppe Picciati, presentata dal Corrisp. T. Levi-Civita.

Una sfera dotata di moto traslatorio rettilineo (uniforme o no) in seno ad un liquido viscoso incomprimibile è soggetta ad una resistenza, di cui si sa assegnare l'espressione generale [1], quando il movimento del sistema abbia il carattere di moto « lento ».

Questa resistenza, per un generico istante t, dipende in modo funzionale dai valori della velocità e della accelerazione in tutto l'intervallo di tempo che va dall'istante iniziale fino all'istante t.

Si può in particolare proporsi lo studio del movimento rettilineo della sfera, quando sfera e liquido si trovino sottoposti all'azione della gravità. Si perviene ad un'equazione funzionale da cui si ricava nel modo più generale l'espressione della velocità della sfera sotto forma di una serie, convergente per qualunque valore del tempo.

Da questa espressione si deduce, con procedimento rigoroso, ciò che si era ammesso finora solo per intuizione fisica, cioè che la caduta della sfera tende a divenire uniforme, con la velocità che le compete nel moto stazionario, quando si fanno equilibrio il peso e la resistenza diretta.

L'equazione funzionale che regge il periodo variabile della caduta è stata stabilita dal sig. Basset [2]. Egli ne ha costruito un integrale approssimato profittando della piccolezza del coefficiente di attrito. Quanto alla soluzione esatta il Basset osserva « It seems almost hopeless to attempt to determine the complete value ».

[1] Vedi la formola (25) della mia Nota: *Sul moto di una sfera in un liquido viscoso*, Rend. Acc. Lincei, 2 giugno 1907.

[2] *A Treatise on Hydrodynamics*, vol. II, pag. 291.