ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

non dimostri, per il lievissimo sviluppo di azoto, di essere energica ma anzi relativamente blanda. È probabile che la durata dell'esperienza (¹) e la presenza inevitabile di altre sostanze abbiano avuto pure un'influenza sulla polimerizzazione dell'acido; ad ogni modo è certo che se questa non si compie esclusivamente a spese dell'acido prussico ma riguarda altresì il prodotto di reazione col diazo-metano, tale prodotto non può concorrervi che in misura piuttosto lieve, ottenendosene infatti una discreta quantità dopo completa eliminazione del solvente.

Ma ciò che importa sopratutto di notare si è che anche nella condizione sperimentale testè descritta, che parrebbe singolarmente propizia alla formazione di un solo etere, e forse anche favorevole alla sintesi dell'osotriazolo, *non si forma traccia di composto triazolico, mentre prendono origine*, come nel caso dell'eterificazione in soluzione eterea, *tanto la carbilammina quanto il nitrile.*

Anche l'esclusione di alcool etilico nel prodotto di reazione non è, come noi credevamo, del tutto raggiunta, ed anzi ciò accrebbe, come nelle esperienze precedenti, la difficoltà che già offre per conto proprio il frazionamento di un miscuglio di metil-carbilammina e di aceto-nitrile. Avendo eliminato infatti dal liquido di reazione (previamente filtrato) l'eccesso di acido prussico, e sottoposto alla distillazione il residuo così ottenuto (brunastro per sostanze azulmiche) non ci fu dato d'isolare — anche a causa della scarsa quantità di prodotto — che porzioni bollenti solo entro limiti piuttosto estesi, 55-62°, 62-70°, 70-79°.

Ad ogni modo potemmo identificare nelle prime due porzioni di distillazione l'isonitrile mediante l'acido ossalico anidro e nella terza porzione tanto l'alcool etilico quanto il nitrile acetico operando come sopra fu detto a proposito dell'eterificazione in soluzione eterea.

Fisica matematica. — *Determinazione della deformazione di un corpo elastico per date tensioni superficiali.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrispondente LEVI-CIVITA.

Seguendo l'ordine d'idee, che già mi condusse ad una risoluzione semplice (²) del problema della *determinazione della deformazione di un corpo elastico isotropo, nel caso in cui si conoscono gli spostamenti superficiali*, risolverò ora il problema analogo nel caso, assai più importante per la pratica, in cui *sono date le tensioni superficiali.*

Ridurrò questo problema alla risoluzione di quattro equazioni integrali, del tipo di Fredholm, nelle quali i nuclei sono funzioni armoniche, finite, ecc.

(¹) Circa 10 ore, anche a causa delle malaugurate esplosioni di cui sopra.

(²) Boggio, *Nuova risoluzione di un problema fondamentale della teoria dell'elasticità* (Rendiconti di questa R. Accademia, 2° semestre 1907).

nel campo considerato, e di cui le quattro funzioni incognite sono la dilatazione cubica e le tre rotazioni elementari; dalla conoscenza di queste funzioni si deducono poi subito le componenti dello spostamento.

Supporrò soltanto che si sappia determinare la funzione armonica nel campo dato, e che, sul contorno, assume valori dati (problema di Dirichlet); e la funzione armonica nello stesso campo, la cui derivata normale, sul contorno, assume valori dati (problema di Neumann). Ciascuno di questi due problemi può, del resto, come è noto, essere risolto mediante un'equazione integrale.

Il metodo esposto vale anche nel caso di due variabili, e quindi fornisce la soluzione del problema di *determinare la deformazione di una piastra elastica, isotropa, piana, soggetta a tensioni date, applicate sul contorno, e agenti nel piano della piastra.*

Poichè inoltre è noto (da ricerche mie e del prof. Lauricella) che questo problema è perfettamente equivalente a quello dell' integrazione della doppia equazione di Laplace, per dati valori, sul contorno, dell' integrale e della sua derivata normale, si conclude che avremo così una nuova soluzione del problema della *deformazione di una piastra elastica, isotropa, piana, incastrata soggetta a forze date, applicate nei vari punti di essa.*

1. Consideriamo un solido elastico isotropo S (non soggetto a forze di massa), limitato da una superficie chiusa σ, nei punti della quale sono applicate delle tensioni date, producenti una determinata deformazione del corpo S.

Le componenti u, v, w dello spostamento di un punto qualsiasi di S dovranno soddisfare, nei punti di S, alle equazioni indefinite:

$$(1)\qquad \Delta_2 u + k\frac{d\theta}{dx} = 0 \quad , \quad \Delta_2 v + k\frac{d\theta}{dy} = 0 \quad , \quad \Delta_2 w + k\frac{d\theta}{dz} = 0\,,$$

$$(2)\qquad \theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\,,$$

ove k è una costante.

Ponendo poi:

$$(3)\qquad \omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right)\,,\ \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right)\,,\ \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)\,,$$

le (1) possono anche scriversi:

$$(4)\qquad \frac{k+1}{2}\frac{d\theta}{dx} + \frac{d\omega_2}{dz} - \frac{d\omega_3}{dy} = 0\,,\ \frac{k+1}{2}\frac{d\theta}{dy} + \frac{d\omega_3}{dx} - \frac{d\omega_1}{dz} = 0\,, \ldots$$

È poi chiaro che dalle (3) segue:

$$(5)\qquad \frac{d\omega_1}{dx} + \frac{d\omega_2}{dy} + \frac{d\omega_3}{dz} = 0\,.$$

Le funzioni u, v, w devono inoltre, nei punti di σ, soddisfare alle equazioni ai limiti:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dn} &= \varphi_1 - \left(\frac{k-1}{2}\,\theta\,\frac{dx}{dn} + \omega_3\frac{dy}{dn} - \omega_2\frac{dz}{dn}\right)\\ \frac{dv}{dn} &= \varphi_2 - \left(\frac{k-1}{2}\,\theta\,\frac{dy}{dn} + \omega_1\frac{dz}{dn} - \omega_3\frac{dx}{dn}\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

ove n è la normale a σ, volta all'interno di S, e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono funzioni date nei punti di σ, proporzionali alle componenti delle tensioni applicate, e soddisfacenti alle condizioni:

$$(7)\qquad \int_\sigma \varphi_1\, d\sigma = 0\,, \ldots \int_\sigma (y\varphi_1 - x\varphi_2)\, d\sigma = 0\,, \ldots$$

necessarie affinchè il solido S, supposto rigido, sia in equilibrio.

2. Ciò posto, il metodo che si presenta più naturale per determinare gli spostamenti u, v, w è quello di riguardare provvisoriamente come note le funzioni $\theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, e quindi ricavare separatamente le funzioni u, v, w mediante le (1), (6). Sostituendo poi nelle (2), (3) avremo quattro equazioni contenenti soltanto le quattro funzioni incognite $\theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, determinate le quali, si avranno subito u, v, w.

Denotiamo intanto con Γ' la *funzione preliminare del Dini* [1], cioè la funzione armonica e regolare in S, e che su σ soddisfa all'equazione:

$$\frac{d\Gamma'}{dn} = \frac{d\frac{1}{r}}{dn} + c\,,$$

ove r è la distanza del punto (x, y, z) di S dal punto variabile (ξ, η, ζ) pure di S, e c è una costante che si determina subito, e poi poniamo:

$$(8)\qquad G' = \frac{1}{r} - \Gamma'\,,$$

allora sussisterà l'eguaglianza nota [2]:

$$(9)\qquad 4\pi u(x, y, z) = -\int_\sigma G'\frac{du}{dn}\, d\sigma - \int_S G'\Delta_2 u\, dS\,,$$

(¹) Chiamo così la funzione Γ' perchè essa è stata considerata, per primo, dal Dini il quale l'ha pure costruita per alcuni campi; cfr. Dini, *Su una funzione analoga a quella di Green* (Atti di questa R. Accademia, serie 2ª, vol. III, a. 1876). Il Neumann, che introdusse tale funzione più tardi, la chiama *funzione caratteristica.*

(²) Dini, loc. cit.; oppure: Marcolongo, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, pag. 30 (Milano, a. 1904).

purchè però sia soddisfatta la condizione:

$$\int_s \Delta_2 u\, dS + \int_\sigma \frac{du}{dn}\, d\sigma = 0. \tag{10}$$

Considerando ora la prima delle (1) e delle (6), si riconosce subito, a causa della prima delle (7), che è verificata la (10), quindi applicando la (9) si trae:

$$4\pi u = -\int_\sigma G'\varphi_1\, d\sigma + \int_\sigma G'\left(\frac{k-1}{2}\theta\frac{d\xi}{dn} + \omega_3\frac{d\eta}{dn} - \omega_2\frac{d\zeta}{dn}\right)d\sigma + \\ + k\int_s G'\frac{d\theta}{d\xi}dS,$$

ovvero, trasformando in integrali di volume:

$$4\pi u = -\int_\sigma G'\varphi_1\, d\sigma - \int_s G'\left(\frac{k-1}{2}\frac{d\theta}{d\xi} + \frac{d\omega_3}{d\eta} - \frac{d\omega_2}{d\zeta}\right)dS - \\ \int_s\left(\frac{k-1}{2}\frac{dG'}{d\xi}\theta + \frac{dG'}{d\eta}\omega_3 - \frac{dG'}{d\zeta}\omega_2\right)dS + k\int_s G'\frac{d\theta}{d\xi}dS,$$

cioè ricordando la prima delle (4):

$$4\pi u = -\int_\sigma G'\varphi_1\, d\sigma - \int_s\left(\frac{k-1}{2}\frac{dG'}{d\xi}\theta + \frac{dG'}{d\eta}\omega_3 - \frac{dG'}{d\zeta}\omega_2\right)dS\,;$$

tenendo conto della (8) e osservando che $\dfrac{d\frac{1}{r}}{d\xi} = -\dfrac{d\frac{1}{r}}{dx}, \ldots$, si ottiene:

$$4\pi u = -\int_\sigma G'\varphi_1\, d\sigma + \frac{k-1}{2}\frac{d}{dx}\int_s\frac{\theta dS}{r} + \frac{d}{dy}\int_s\frac{\omega_3 dS}{r} - \frac{d}{dz}\int_s\frac{\omega_2 dS}{r} + \\ + \frac{k}{2}\frac{1}{2}\int_s\frac{d\Gamma'}{d\xi}\theta dS + \int_s\frac{d\Gamma'}{d\eta}\omega_3 dS - \int_s\frac{d\Gamma'}{d\zeta}\omega_2 dS, \tag{11}$$

e due eguaglianze analoghe per v, w si hanno con permutazioni circolari.

È chiaro che il sistema delle (1), (4), (6) è equivalente al sistema delle (4), (11). Sostituendo i valori (11) nella (2) risulta:

$$4\pi\theta = \frac{k-1}{2}\Delta_2\int_s\frac{\theta dS}{r} + \frac{k-1}{2}\int_s\left(\frac{d^2\Gamma'}{dx\,d\xi} + \frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\eta} + \frac{d^2\Gamma'}{dz\,d\zeta}\right)\theta dS + \\ + \int_s\left(\frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\zeta} - \frac{d^2\Gamma'}{dz\,d\eta}\right)\omega_1 dS + \int_s\left(\frac{d^2\Gamma'}{dz\,d\xi} - \frac{d^2\Gamma'}{dx\,d\zeta}\right)\omega_2 dS + \\ + \int_s\left(\frac{d^2\Gamma'}{dx\,d\eta} - \frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\xi}\right)\omega_3 dS + H_0,$$

ove H_0 è funzione conosciuta; ne segue:

$$2\pi(k+1)\,\theta-\frac{k-1}{2}\int_S\left(\frac{d^2\Gamma}{dx\,d\xi}+\frac{d^2\Gamma}{dy\,d\eta}+\frac{d^2\Gamma}{dz\,d\zeta}\right)\theta dS-$$

$$(12)\qquad -\int_S\left(\frac{d^2\Gamma}{dy\,d\zeta}-\frac{d^2\Gamma}{dz\,d\eta}\right)\omega_1\,dS-\int_S\left(\frac{d^2\Gamma}{dz\,d\xi}-\frac{d^2\Gamma}{dx\,d\zeta}\right)\omega_2\,dS-$$
$$-\int_S\left(\frac{d^2\Gamma}{dx\,d\eta}-\frac{d^2\Gamma}{dy\,d\xi}\right)\omega_3\,dS=H_0\,.$$

Sostituendo poi i valori (11) nelle (3) si deduce tosto:

$$4\pi\omega_1=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\int_S\frac{\omega_1\,dS}{r}+\frac{d}{dy}\int_S\frac{\omega_2\,dS}{r}+\frac{d}{dz}\int_S\frac{\omega_3 dS}{r}\right)+$$
$$(13)\qquad +\frac{k-1}{2}\int_S\left(\frac{d^2\Gamma}{dy\,d\zeta}-\frac{d^2\Gamma}{dz\,d\eta}\right)\theta dS-\int_S\left(\frac{d^2\Gamma}{dy\,d\eta}+\frac{d^2\Gamma}{dz\,d\zeta}\right)\omega_1\,dS+$$
$$+\int_S\left(\frac{d^2\Gamma}{dy\,d\xi}\,\omega_2+\frac{d^2\Gamma}{dz\,d\xi}\,\omega_3\right)dS+H_1\,,$$

ove H_1 è funzione conosciuta; e due analoghe per ω_2, ω_3.

3. Le equazioni (12), (13) costituiscono un sistema di quattro equazioni integrali, colle quattro funzioni incognite θ, ω_1, ω_2, ω_3. Però ad esse non possono applicarsi i risultati stabiliti da Fredholm sulle equazioni integrali, perchè i primi termini dei secondi membri delle (13) hanno i nuclei che presentano un punto di infinito di 3° ordine nel campo d'integrazione S.

Mediante un opportuno artificio, si possono però trasformare tali termini in altri, i cui nuclei sono funzioni finite e continue nel campo S.

Consideriamo perciò la funzione di Green G relativa ad S, allora si ha

$$\int_S\frac{dG}{d\xi}\,\omega_1\,dS=-\int_S G\,\frac{d\omega_1}{d\xi}\,dS\,,$$

osservando poi che $G=\frac{1}{r}-\Gamma$, ove Γ è la funzione preliminare di Green, si deduce:

$$\frac{d}{dx}\int_S\frac{\omega_1\,dS}{r}=-\int_S\frac{d\Gamma}{d\xi}\,\omega_1\,dS+\int_S G\,\frac{d\omega_1}{d\xi}\,dS\,,$$

quindi, ricordando la (5):

$$\frac{d}{dx}\int_S\frac{\omega_1\,dS}{r}+\frac{d}{dy}\int_S\frac{\omega_2\,dS}{r}+\frac{d}{dz}\int_S\frac{\omega_3\,dS}{r}=-$$
$$-\int_S\left(\frac{d\Gamma}{d\xi}\,\omega_1+\frac{d\Gamma}{d\eta}\,\omega_2+\frac{d\Gamma}{d\zeta}\,\omega_3\right)dS\,,$$

onde, sostituendo nelle (13):

$$
\begin{aligned}
&4\pi\omega_1 - \frac{k-1}{2}\int_s\left(\frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\zeta} - \frac{d^2\Gamma'}{dz\,d\eta}\right)\theta dS + \\
(14)\qquad &\qquad + \int_s\left(\frac{d^2\Gamma}{dx\,d\xi} + \frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\eta} + \frac{d^2\Gamma'}{dz\,d\zeta}\right)\omega_1 dS + \\
&+ \int_s\left(\frac{d^2\Gamma}{dx\,d\eta} - \frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\xi}\right)\omega_2 + \int_s\left(\frac{d^2\Gamma}{dx\,d\zeta} - \frac{d^2\Gamma'}{dz\,d\xi}\right)\omega_3\, dS = H_1
\end{aligned}
$$

e due analoghe per ω_2, ω_3.

In queste equazioni (14), i nuclei sono funzioni armoniche, finite e continue in S. Esse, unitamente alla (12), formano un sistema di quattro equazioni integrali, del tipo di Fredholm, delle quali, coi procedimenti dati da Fredholm, si possono ricavare le quattro funzioni incognite $\theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Poichè è facile riconoscere che il sistema delle (11), (12), (14) è equivalente al sistema delle (11), (2), (3), è chiaro che sostituendo i valori ottenuti per $\theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ nelle (11), avremo le funzioni u, v, w che risolvono il problema proposto.

Ponendo (per k diverso da 1): $\theta_1 = -\dfrac{k-1}{2}\theta$, il sistema delle (12), (14) si trasforma in un altro del tipo:

$$\lambda_s\omega_s(x, y, z) - \sum_0^3{}_r\int_s f_{rs}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\,\omega_r(\xi, \eta, \zeta)\, dS = H_s(x, y, z),$$
$$(s = 0, 1, 2, 3),$$

ove:

$$\lambda_0 = -4\pi\frac{k+1}{k-1}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4\pi, \quad \omega_0 = \theta_1,$$

inoltre i nuclei f_{rs} soddisfano alle condizioni:

$$f_{rs}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = f_{sr}(\xi, \eta, \zeta; x, y, z). \tag{15}$$

Il precedente sistema d'equazioni integrali si può agevolmente trasformare in un'unica equazione integrale equivalente, con un procedimento indicato da Fredholm, e allora si avrà un'equazione della forma:

$$\Omega(x, y, z) - \int_\tau F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\,\Omega(\xi, \eta, \zeta)\, d\tau = H(x, y, z),$$

ove Ω è la funzione incognita e τ denota un campo conveniente.

Si conclude allora che la funzione Ω e quindi $\theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sono funzioni meromorfe del parametro k; lo stesso accade per le funzioni u, v, w. Ritroviamo così un noto teorema dei sigg. Cosserat, da essi dimostrato per il caso della sfera.

Siccome poi, in virtù delle (15), il nucleo F è una funzione simmetrica, risulta, da un noto teorema di Hilbert che *i poli saranno tutti reali*, e inoltre, da un teorema che ho stabilito recentemente, che *i poli saranno tutti semplici.*

Si riconosce poi subito che i residui delle funzioni θ, ω_1, ω_2, ω_3 corrispondenti ad un polo k' costituiscono una quaterna di autofunzioni (Eigenfunctionen) delle (12), (14), quindi le (11) forniscono poi, per $k = k'$, una una soluzione u', v', w' delle equazioni d'equilibrio, diversa da zero, e corrispondente a tensioni superficiali nulle.

4. Il sistema delle (12), (14) avrà una sola soluzione, purchè k non sia esattamente un autovalore (Eigenwert). A questo riguardo, si può osservare che è facile vedere che, se per un valore determinato k' di k, le equazioni (1), (2), (3), (6) hanno una sola soluzione, prescindendo, s'intende, dagli spostamenti nel moto di corpo rigido (cioè le funzioni u, v, w sono identicamente nulle in S, quando φ_1, φ_2, φ_3 sono nulle su σ), allora il valore corrispondente k' di k non sarà certo un autovalore (o polo) per il sistema delle (12), (14).

Inoltre è facile stabilire che se $k > \frac{1}{3}$ le equazioni (1), (2), (3), (6) hanno una sola soluzione.

Infatti, dalle (16) si ha (ritenendo φ_1, φ_2, φ_3 nulle):

$$\int_\sigma \left\{ u \left(\frac{du}{dn} + \frac{k-1}{2} \theta \frac{dx}{dn} + \omega_3 \frac{dy}{dn} - \omega_2 \frac{dz}{dn} \right) + v(\cdots) + w(\cdots) \right\} d\sigma = 0,$$

ovvero, trasformando in integrali di volume:

$$\int_S \left\{ \left(\varDelta u + u \varDelta_2 u + \frac{k-1}{2} \theta \frac{du}{dx} + \frac{k-1}{2} u \frac{d\theta}{dx} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \omega_3 \frac{du}{dy} + u \frac{d\omega_3}{dy} - \omega_2 \frac{du}{dz} - u \frac{d\omega_2}{dz} \right) + \cdots \right\} dS = 0,$$

cioè, ricordando le (1), (2), (3), (4):

$$(16) \qquad \int_S \left\{ \varDelta u + \varDelta v + \varDelta w + \frac{k-1}{2} \theta^2 - 2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \right\} dS = 0,$$

che può ancora scriversi:

$$\int_S \left\{ \frac{2}{3} \left[\left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right)^2 + \cdots \right] + \left[\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)^2 + \cdots \right] + \left(k - \frac{1}{3} \right) \theta^2 \right\} dS = 0.$$

Da quest'equazione si trae che se $k > \frac{1}{3}$ sono nulle le 6 componenti di deformazione, d'onde segue il teorema enunciato.

È poi noto che per $k = \frac{1}{3}$ si ha, per la sfera, precisamente un polo semplice, quindi, per tale valore, non sussiste più il teorema di unicità.

I poli perciò cadranno tra $\frac{1}{3}$ e $-\infty$.

Si può anche stabilire che i poli debbono essere reali, osservando che se si considerano due quaterne di autofunzioni $\theta', \omega_1', \omega_2', \omega_3'$; $\theta'', \omega_1'', \omega_2'', \omega_3''$, corrispondenti a due autovalori k' e k'' *diversi tra loro*, si può dimostrare che esse soddisfano ad una relazione di ortogonalità.

Infatti chiamando u', v', w' ; u'', v'', w'' gli spostamenti ad esse corrispondenti, si ha dalle (6):

$$\int_\sigma \left\{ u'' \left(\frac{du'}{dn} + \frac{k'-1}{2} \theta' \frac{dx}{dn} + \omega_3' \frac{dy}{dn} - \omega_2' \frac{dz}{dn} \right) + v''(\cdots) + w''(\cdots) \right\} d\sigma = 0,$$

trasformando in integrali di volume, come dianzi, si trova:

$$\int_S \left\{ \Delta(u', u'') + \Delta(v', v'') + \Delta(w', w'') + \frac{k'-1}{2} \theta'\theta'' - \right.$$
$$\left. - 2(\omega_1'\omega_1'' + \omega_2'\omega_2'' + \omega_3'\omega_3'') \right\} dS = 0,$$

che è analoga alla (16); scambiando u', v', w' con u'', v'', w'', e quindi k' con k'', si conclude, essendo k' diverso da k'':

$$\int_S \theta'\theta'' dS = 0.$$

Da questa relazione si trae subito che *gli autovalori sono reali.*

Osservazione. — Il precedente metodo d'integrazione è applicabile anche nel caso in cui le equazioni ai limiti siano della forma seguente, più generale della (6):

$$\frac{du}{dn} = \varphi_1 - a\theta \frac{dx}{dn} - b\left(\omega_3 \frac{dy}{dn} - \omega_2 \frac{dz}{dn}\right), \ldots,$$

ove a, b sono costanti, legate dalla relazione: $2a + (k+1)\,b = 2k$, necessaria per la validità delle (7), [o della (10)].

5. Le considerazioni precedenti valgono pure nel caso di un numero qualunque di variabili. Ad es. per due variabili, l'equazione corrispondente della (12) è:

$$\pi(k+1)\,\theta - \frac{k-1}{2}\int_\sigma \left(\frac{d^2\Gamma}{dx\,d\xi} + \frac{d^2\Gamma}{dy\,d\eta} \right) \theta d\sigma -$$
$$(12') \qquad - \int_\sigma \left(\frac{d^2\Gamma}{dx\,d\eta} - \frac{d^2\Gamma}{dy\,d\xi} \right) \omega d\sigma = F,$$

ove σ è l'area piana che si considera, ed ω corrisponde ad ω_3(ω_1 e ω_2 sono identicamente nulli).

Le (13) si riducono poi all'unica equazione:

$$(13')\qquad 2\pi\omega - \frac{k-1}{2}\int_\sigma\left(\frac{d^2\Gamma'}{dx\,d\eta} - \frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\xi}\right)\theta d\sigma + \\ + \int_\sigma\left(\frac{d^2\Gamma'}{dx\,d\xi} + \frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\eta}\right)\omega d\sigma = \mathrm{H}\,.$$

Le (12'), (13') sono due equazioni integrali del tipo di Fredholm, i cui nuclei sono funzioni armoniche, finite e continue nell'area σ, perciò da esse si possono ricavare le due funzioni incognite $\theta\,,\omega$, dopo di che le formole corrispondenti alle (11) forniranno le funzioni $u\,,v$ che risolvono il problema della deformazione di una piastra elastica isotropa piana, soggetta a tensioni date, applicate sul contorno.

Si può eziandio risolvere la stessa questione in modo più semplice; infatti da ricerche mie e del prof. Lauricella [1] risulta in primo luogo, che, supposto risolto tale problema per un valore particolare di k diverso da 0, lo si potrà, mediante sole quadrature, risolvere per qualsiasi altro valore di k (diverso da 0). Ora ad es. per $k=1$ il sistema (12'), (13') si riduce alla forma semplicissima:

$$(12_1)\qquad 2\pi\theta - \int_\sigma\left(\frac{d^2\Gamma'}{dx\,d\eta} - \frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\xi}\right)\omega\,d\sigma = \mathrm{F}\,,$$

$$(13_1)\qquad 2\pi\omega + \int_\sigma\left(\frac{d^2\Gamma'}{dx\,d\xi} + \frac{d^2\Gamma'}{dy\,d\eta}\right)\omega\,d\sigma = \mathrm{H}\,;$$

la (13_1) è un'equazione integrale di Fredholm, che permette di ricavare l'unica funzione incognita ω che vi figura, dopo di che la (12_1) fornirà senz'altro il valore di θ.

In secondo luogo, gli spostamenti $u\,,v$ sono funzioni regolari del parametro k (il valore $k=0$ escluso, che è singolare per le equazioni stesse d'equilibrio), perciò si conclude che l'equazione (13_1) ha un'unica soluzione, quindi il procedimento precedente fornisce l'unica coppia $u\,,v$ di funzioni che risolvono il problema proposto.

Risulta ancora, dalle ricerche citate, che la questione ora risolta è equivalente alla ricerca della funzione biarmonica in un'area piana, che sul contorno assume, colla sua derivata normale, dei valori assegnati; abbiamo dunque così anche una nuova soluzione di quest'ultimo problema.

(1) Boggio, *Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche* ecc. (Rendiconti di questa R. Accademia, serie 5ª, vol. XIII, 2° semestre 1904); Lauricella, *Sulle equazioni della deformazione delle piastre*, ecc. (Id. id., vol. XIV, 1° semestre 1905).