ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Sull'equazione del calore.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. La teoria delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo parabolico è assai più arretrata che la teoria delle equazioni di tipo ellittico ed iperbolico, specialmente dal punto di vista delle funzioni di variabili reali. Per esse invero non si conosce nessun generale teorema di esistenza per date condizioni al contorno: furono studiati soltanto il problema di Cauchy [1] ed alcuni classici casi di particolari contorni che si presentano nella teoria analitica della propagazione del calore.

Io mi sono proposto di studiare fino a qual punto si possa per queste equazioni costruire una teoria analoga a quella delle equazioni ellittiche ed iperboliche: ed ho cominciato coll'occuparmi della più semplice delle equazioni di tipo parabolico:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial y} = f(xy)\ .\ (a = \text{cost.}). \tag{1}$$

Mi permetto qui di riassumere in breve i risultati ottenuti, riservandomi di pubblicare più minute dimostrazioni in un prossimo lavoro.

2. Nessuna limitazione essenziale si introduce nei nostri studî se all'equazione (1) si sostituisce l'altra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(xy); \tag{2}$$

poichè quella si può sempre ridurre a questa operando un semplicissimo cambiamento di variabili. Fisseremo quindi d'ora innanzi la nostra attenzione sopra l'equazione (2).

[1] E noi sappiamo che se le funzioni iniziali nel problema di Cauchy non sono analitiche non esistono in generale le soluzioni del problema. Mi corre qui l'obbligo di notare che questo teorema, che io dimostrai nel mio lavoro, intitolato: *Sul problema di Cauchy,* e pubblicato nei Rendiconti di questa Accademia [vol. XVI, serie 5ª, 2° semestre], era già stato dimostrato dall'Holmgren nella Memoria: *Om Cauchy's problem vid de lineära partiella differentialekvationen al 2: dra ordningen* (Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, tomo II, 1905). Così pure l'impossibilità del problema di Cauchy per le equazioni ellittiche era già stata notata dall'Hadamard in una Memoria del Bollettino dell'Università di Princeton, che non ho potuto consultare. Anzi questi autori stabilirono come la distribuzione dei valori della derivata rapporto ad x debba dipendere dai valori della funzione assegnati sulla retta $x = o$ perchè il problema di Cauchy ammetta soluzione. Debbo queste indicazioni al prof. Hadamard.

Per questa il Volterra [1] ha dimostrato che *due soluzioni, finite e continue insieme colle derivate* $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}$, *le quali nei punti di una curva aperta* s, (la quale non si stenda all' infinito nel senso delle y negative), *i cui estremi si trovino su una medesima caratteristica e giaccia tutta al disotto della caratteristica medesima, prendano gli stessi valori sono identiche in tutto il campo* S *racchiuso da* s *e dalla caratteristica medesima.*

Si deducono facilmente di qui due notevoli conclusioni:

1°: *il massimo ed il minimo valore che una soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

assume in un'area S *come quella del teorema precedente non possono essere presi che su* s;

2°: *una successione di funzioni soddisfacenti all'equazione* (2) *che converga uniformemente nei punti di un contorno* s, *converge uniformemente in* S, *e la funzione limite rappresenta una soluzione di* (2).

3. Ma la questione più interessante che il teorema precedente ci suggerisce è quella di invertire la proposizione medesima: *Data una catena continua di valori su una curva aperta* s *i cui estremi stiano sopra una caratteristica esiste una soluzione di* (2) *la quale prenda su* s *i valori assegnati?*

Prima di accingerci a rispondere a questa domanda premettiamo qualche osservazione. Si noti anzitutto che, spezzando opportunamente il campo S mediante caratteristiche, noi possiamo ridurre il problema generale al caso più semplice in cui s sia incontrata due sole volte da ogni caratteristica: supporremo quindi s formata da due tratti di curva s_1 ed s_2, situati nel semipiano delle y positive ed aventi l'origine sull'asse delle x, ed eventualmente da un tratto dell'asse delle x. Su s_1 ed s_2 si avrà rispettivamente $x = \xi_1(y)$ e $x = \xi_2(y)$ ($\xi_1(y) < \xi_2(y)$ per $y \neq 0$); quando il contorno non abbia che un punto sull'asse delle x ($\xi_1(0) = \xi_2(0)$) esso si dirà di *prima specie*, quando il contorno contenga un tratto dell'asse delle x ($\xi_1(0) < \xi_2(0)$) si dirà di *seconda specie* [2]. Indicheremo con $s(y_1)$ ed $S(y_1)$ le parti di s ed S situate al disotto della caratteristica $y = y_1$: talchè pel teorema del n. 2 i valori in $S(y_1)$ di una soluzione di (2) sono determinati dai valori su $s(y_1)$.

(1) V. Volterra, *Leçons sur l'intégration des équations différentielles etc. professées à Stockholm*, pag. 64-65.

(2) Resterebbe ancora il caso, che sotto alcuni aspetti è ancora più semplice, in cui s contiene un tratto infinito di una caratteristica ed è incontrata una volta sola da ogni caratteristica diversa da quella: per brevità qui non ne parleremo.

Ciò posto si ricordi che, se $v(xy)$ è una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\,, \tag{4}$$

e z una soluzione di (2) e con C si indica un campo qualunque il cui contorno sia c, si ha

$$\iint_C vf(xy)\,dx\,dy=\int_c\left(v\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy+\int_c zv\,dx\,. \tag{5}$$

Si applichi questa formula prendendo come campo C il campo $S(y')$ e quale funzione v la funzione

$$h(xy\,;x'y')=e^{-\frac{(x'-x)^2}{4(y'-y)}}\frac{1}{\sqrt{y'-y}}\,; \tag{6}$$

si deduce facilmente con metodi noti la *formula di Green*

$$\left.\begin{array}{ll}(7)_1 & 2\sqrt{\pi}\,z(x'y')\\ (7)_2 & 0\end{array}\right\}=\int_{s(y')}h(xy\,;x'y')\left\{\left[\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{x'-x}{2(y'-y)}\right]dy+z\,dx\right\}-$$
$$-\iint_{S(y')}h(xy\,;x'y')\,f(xy)\,dx\,dy\,,$$

la $(7)_1$ valendo quando il punto $(x'y')$ è in $S(y')$, la $(7)_2$ quando è fuori di $S(y')$. Inoltre, se il punto $(x'y')$ è sul contorno, per es.: se è il punto $(\xi_1(y'),y')$, e se in un intorno di esso s_1 soddisfa alla condizione che esista un numero finito H tale che sempre si abbia $\left|\frac{\xi_1(y)-\xi_1(y')}{x-x'}\right|<H$, noi possiamo aggiungere che si ha

$$(7)_3\qquad \sqrt{\pi}\,z(\xi_1(y')\,y')=\int_{s(y')}h(xy\,;\xi_1(y')\,y')\times$$
$$\times\left\{\left[\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\xi_1(y')-x}{2(y'-y)}\right]dy+z\,dx\right\}-\iint_{S(y')}h(xy\,;\xi_1(y')\,y')\,f(xy)\,dx\,dy\,.$$

Chiameremo condizione (a) la condizione imposta ora al contorno: conviene notare che gli integrali di $(7)_3$ hanno senso in forza della condizione (a) medesima.

Se in particolare nelle (7) si pone $z(xy)=1$, otteniamo

$$\left.\begin{array}{ll}(8)_1 & 2\sqrt{\pi}\\ (8)_2 & 0\\ (8)_3 & \sqrt{\pi}\end{array}\right\}=-\int_{s(y')}h(xy\,;x'y')\left\{\frac{x'-x}{2(y'-y)}dy-dx\right\},$$

la cui analogia colla formula di Gauss della teoria delle funzioni armoniche è ben evidente.

4. Siamo ora in grado di indicare un primo metodo per la dimostrazione del teorema d'esistenza: ci limitiamo per il momento al caso che l'equazione (2) non abbia termine noto, e cioè all'equazione (3).

Dalle formole $(8)_1$, $(8)_3$ segue facilmente un teorema analogo a quello dei potenziali di doppio strato: *l'integrale*

$$(9)\qquad \int_{s_1(y')} h(\xi_1(y)\,y\,;x'y')\left\{\frac{x'-\xi_1(y)}{2(y'-y)}+\xi_1'(y)\right\}\psi_1(y)\,dy$$

dove $\psi_1(y)$ *è una funzione continua della* y, *è una funzione finita e continua in tutti i punti del piano fuori di* s_1: *quando il punto* $(x'y')$ *si avvicina ad un punto* $(\xi_1(y_1)\,y_1)$ *in cui* s_1 *soddisfaccia alla condizione* (a) *si ha*

$$(10)\qquad \begin{aligned}\lim_{\substack{y'=y_1\\ x'=\xi_1(y_1)\pm 0}} \int_{s_1(y')} h(\xi_1(y)\,y\,;x'y')\left[\frac{x'-\xi_1(y)}{2(y'-y)}-\xi_1'(y)\right]\psi_1(y)\,dy = \\ \pm\sqrt{\pi}\,\psi_1(y_1)+\int_{s_1(y_1)} h(\xi_1(y)\,y\,;\xi_1(y_1)\,y_1)\left[\frac{\xi_1(y_1)-\xi_1(y)}{2(y_1-y)}-\xi_1'(y)\right]\psi_1(y)\,dy\,.\end{aligned}$$

Fondandoci su questo teorema è facile ricondurre la determinazione di una soluzione di (2) che prenda assegnati valori su s alla risoluzione di una equazione integrale seguendo il metodo di Neumann-Fredholm.

Indichiamo con $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi(x)$ i valori assegnati per la funzione rispettivamente su s_1, s_2 e sul tratto $\xi_1(0)\ldots\xi_2(0)$ dell'asse delle x, con $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ due funzioni da determinarsi convenientemente; e vediamo di porre la funzione cercata sotto la forma

$$(11)\qquad \begin{aligned} z(x'y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Bigg\{&\int_{s_1(y')} h(\xi_1(y)\,y\,;x'y')\left[\frac{x'-\xi_1(y)}{2(y'-y)}-\xi_1'(y)\right]\psi_1(y)\,dy\,- \\ &-\int_{s_2(y')} h(\xi_2(y)\,y\,;x'y')\left[\frac{x'-\xi_2(y)}{2(y'-y)}-\xi_2'(y)\right]\psi_2(y)\,dy\,- \\ &+\int_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} h(x0\,;x'y')\,\varphi(x)\,dx\Bigg\}.\end{aligned}$$

Questa funzione prenderà sull'asse delle x i valori assegnati qualunque siano le $\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$: mentre la condizione che il limite della funzione (11) su s_1 ed s_2 sia rispettivamente a $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$, si traduce per la formula (10), quando *si supponga che* s_1 *ed* s_2 *soddisfacciano ovunque alla condizione* (a), nelle equazioni integrali

$$
\begin{aligned}
(12)\quad & \frac{1}{2}\psi_1(y_1)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Bigg[\int_{s_1(y_1)} h(\xi_1(y)\,y\,;\,\xi_1(y_1)\,y_1)\left[\frac{\xi_1(y_1)-\xi_1(y)}{2(y_1-y)}-\xi_1'(y)\right]\psi_1(y)\,dy-\\
&-\int_{s_2(y_1)} h(\xi_2(y)\,y\,;\,\xi_1(y_1)\,y_1)\left[\frac{\xi_1(y_1)-\xi_2(y)}{2(y_1-y)}-\xi_2'(y)\right]\psi_2(y)\,dy\Bigg]=\\
&=\varphi_1(y)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} h(x0\,;\,\xi_1(y_1)\,y_1)\,\varphi(x)\,dx\\
& \frac{1}{2}\psi_2(y_1)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Bigg[\int_{s_1(y_1)} h(\xi_1(y)\,y\,;\,\xi_2(y_1)\,y_1)\left[\frac{\xi_2(y_1)-\xi_1(y)}{2(y_1-y)}-\xi_1'(y)\right]\psi_1(y)\,dy-\\
&-\int_{s_2(y_1)} h(\xi_2(y)\,y\,;\,\xi_2(y_1)\,y_1)\left[\frac{\xi_2(y_1)-\xi_2(y)}{2(y_1-y)}-\xi_2'(y)\right]\psi_2(y)\,dy\Bigg]=\\
&=\varphi_2(y)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} h(x0\,;\,\xi_2(y_1)\,y_1)\,\varphi(x)\,dx\,.
\end{aligned}
$$

A queste equazioni si può applicare la teoria del Fredholm quando si supponga che il contorno oltre che soddisfare alla (a) sia di seconda specie: ma del resto si dimostra facilmente che la soluzione delle (12) si può sviluppare per serie di iterate in modo analogo a quello dell'equazione di Volterra [1].

Il problema risulta così risoluto nel caso che il contorno sia di seconda specie e soddisfaccia alla condizione (a). Queste limitazioni si tolgono facilmente fondandosi sopra i teoremi del n. 2 relativi alle serie di soluzioni (3): ma non vogliamo su ciò intrattenerci in questa Nota.

Osserverò ancora che la soluzione sotto la forma trovata si presta bene allo studio delle derivate almeno quando si supponga che le curve s_1 ed s_2 ammettano curvatura.

5. Un altro metodo di risoluzione si fonda su di una osservazione del prof. Volterra. Premettiamo alcune considerazioni: Nel dedurre la formula (7) da (5) invece da prendere quale funzione $v(xy)$ la $h(xy\,;\,x'y')$ prendiamo la funzione

$$(13)\qquad h(xy\,;\,x'y')+\chi(xy\,;\,x'y')\,,$$

[1] È evidente l'analogia delle equazioni (12) con quella cui si riduce l'equazione integrale del Volterra $f(y)=\int_0^y k(y\,,\eta)\,\psi(\eta)\,d\eta$ con una semplice derivazione

$$\frac{1}{k_1(y\,;y)}f'(y)=\psi(y)+\int_0^y\frac{k_1(y\,;\eta)}{k_1(y\,;y)}\psi(\eta)\,d\eta\quad\left(k_1(y\,;\eta)=\frac{\partial k(y\,;\eta)}{\partial y}\right);$$

poichè in quelle come in questa uno dei limiti dell'integrale è mobile: e quindi si può prevedere come la dimostrazione di convergenza del Volterra serva anche in questo caso. Cfr. Volterra, Atti dell'Accademia di Torino, 1896.

dove la $\chi(xy\,;x'y')$ è ancora una soluzione di (4) nulla per $y=y'$ ed ovunque regolare entro $S(y')$, indicando con z una soluzione di (3) otterremo una formula analoga alla $(7)_1$:

$$(14)\qquad \begin{aligned} 2\sqrt{\pi}\, z(x'y') &= \int_{s(y')} (h(xy\,;x'y') + \chi(xy\,;x'y'))\,\frac{\partial z}{\partial x}\,dy\,- \\ &- \int_{s(y')} z(x\,y)\left\{h(xy\,;x'y')\left[\frac{x'-x}{2(y'-y)}\,dy - dx\right] + \frac{\partial \chi}{\partial x}\,dy - \chi dx\right\}; \end{aligned}$$

ma noi potremo usufruire della $\chi(xy\,;x'y')$ per modo da eliminare dalla formula precedente in tutto od in parte la $\frac{\partial z}{\partial x}$. Così ove si riuscisse a determinare una funzione di Green χ per modo che fosse soluzione di (4) e fosse nulla su $y=y'$ e su $s_1(y')$ ed $s_2(y')$ si riducesse a $-h(\xi_1(y)\,y\,;x'y')$ e $-h(\xi_2(y)\,y\,;x'y')$ rispettivamente, la formula (14) darebbe ogni soluzione di (3) per mezzo dei suoi valori al contorno [1]: e basterebbe dimostrare che inversamente ogni funzione del tipo del secondo membro di (14) rappresenta in tal caso una funzione che prende i valori assegnati sul contorno e soddisfa alla (3) per ottenere una soluzione del nostro problema.

Se un tratto di s appartiene ad una retta che lasci tutto da una banda il campo S, il Volterra [2] ha mostrato come si possa trovare una funzione $\chi_1(xy\,;x'y')$ che permette di eliminare dalla (14) la $\frac{\partial z}{\partial x}$ in questo tratto di s: con un procedimento alternato se ne deduce una funzione che gode delle proprietà sopra enunciate nel caso che il contorno sia di seconda specie e che s_1 ed s_2 siano due tratti rettilinei. Quando il contorno fosse di prima specie la funzione si potrebbe ancora costruire, ma avrebbe una singolarità nel punto in cui s_1 ed s_2 si incontrano [3]. Ragionamenti analoghi a quelli del principio del n. 4 valgono a dimostrare che tale funzione serve realmente a risolvere il problema d'esistenza in questo caso.

È facile passare di qui al caso del contorno poligonale spezzando il campo con rette caratteristiche per modo di ridurre questo problema alla risoluzione successiva del problema per campi che si trovano nelle condi-

[1] La determinazione delle funzioni di Green è, come si vede chiaramente, un problema di natura analoga a quella da noi propostoci applicato all'equazione (4) invece che alla (3). Si osservi che quando il contorno è di prima specie della funzione χ sono dati i valori su tutto un contorno chiuso; onde è a prevedersi che in questo caso una funzione χ *regolare in tutto il campo* non si potrà costruire. Realmente la condizione che la funzione sia regolare in tutto il campo è in parte superflua, essa può ammettere singolarità convenienti senza che vengano a mancare le conclusioni tratte precedentemente: ma noi non vogliamo qui trattenerci sull'enunciato più preciso di queste condizioni.

[2] Volterra, *Leçons*, pp. 67-68.

[3] Cfr. la prima nota del presente n. 5.

zioni precedenti. Di qui poi si passa al caso di una curva qualunque considerando questa quale limite di contorni poligonali interni ad essa.

6. Dimostrato il teorema di esistenza per l'equazione (3) è facile risalire da questo al corrispondente teorema per la (2): poichè costruita una qualunque soluzione ζ di (2), il problema di trovare una soluzione z di (2) che prenda dati valori al contorno, si riduce immediatamente al trovare una soluzione $z-\zeta$ di (3) che prenda valori pure assegnati. La formula $(7)_1$ ci permette di prevedere che in generale la funzione

$$\zeta(x'y')=\iint_{S(y')} h(xy\,;x'y')\,f(xy)\,dx\,dy$$

soddisfa a (2): e realmente si dimostra che *supposto che in un intorno del punto $(x'y')$ la funzione $f(xy)$ sia tale che esistano due numeri positivi α e ν tali che* $\left|\dfrac{f(xy)-f(x'y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2]^\alpha}\right|<\nu$, *la $\zeta(x'y')$ ammette le derivate* $\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x'^2}$, $\dfrac{\partial\zeta}{\partial y'}$ *nel punto $(x'y')$ e soddisfa all'equazione* (2).

Terminerò enunciando una notevole proprietà delle soluzioni dell'equazione (2). Si sa che ogni soluzione dell'equazione (3) è analitica nella variabile x [1]: questo teorema si generalizza alle equazioni (2): *Se il secondo membro $f(xy)$ dell'equazione (2) è una funzione analitica di x, ogni soluzione di (2) è una funzione analitica di x.* E precisamente *se $(x'y')$ è un punto corrispondente a valori complessi di x' la cui proiezione reale sia interna a $S(y')$ e che disti di una quantità sufficientemente piccola dal piano reale, detto $\Sigma(x'y')$ il cono proiettante dal punto $(x'y')$ il contorno $s(y')$ il valore di z nel punto $x'y'$ è dato da*

$$z(x'y')=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{s(y')} h(xy\,;x'y')\left\{\left[\frac{\partial z}{\partial x}-z\,\frac{x'-x}{2(y'-y)}\right]dy+z\,dx\right\}-\iint_{\Sigma(x'y')} h(xy\,;x'y')\,f(xy)\,dx\,dy\,.$$

La dimostrazione di questo enunciato è analoga a quella indicata da me altra volta per le equazioni totalmente ellittiche [2].

7. Tutti questi risultati si estendono senza difficoltà al caso delle equazioni della propagazione del calore in $2,3,\dots,n$ variabili:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=f(x_1\,x_2\dots x_n\,,y)\,.$$

[1] E. E. Levi, *Sul problema di Cauchy*, n. 5 (R. Accademia dei Lincei, vol. XVI, serie 2^a). Vedi anche Holmgren E., *Om Cauchys problem* ecc. (Arkiv för Matematik ecc., tomo II).

[2] E. E. Levi, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche* (Rendiconti Lincei, vol. XVI, serie 2^a, e Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIV).