ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

La superficie dell'onda è dunque quella di una sfera, che si va allargando, mentre il suo centro si sposta lungo l'asse delle x.

Se diciamo X la x del centro, e R il raggio dell'onda, viene subito

$$\frac{dX}{dt} = b\,R\,,$$

e cioè: la velocità di traslazione del centro si mantiene proporzionale al raggio.

Se b tende a zero, l'onda si riduce a

$$x^2 + y^2 = a^2 t^2,$$

come del resto si poteva prevedere.

Meccanica. — *Integrazione dell'equazione funzionale che regge la caduta di una sfera in un liquido viscoso.* Nota del prof. Giuseppe Picciati, presentata dal Corrisp. T. Levi-Civita.

Una sfera dotata di moto traslatorio rettilineo (uniforme o no) in seno ad un liquido viscoso incomprimibile è soggetta ad una resistenza, di cui si sa assegnare l'espressione generale [1], quando il movimento del sistema abbia il carattere di moto « lento ».

Questa resistenza, per un generico istante t, dipende in modo funzionale dai valori della velocità e della accelerazione in tutto l'intervallo di tempo che va dall'istante iniziale fino all'istante t.

Si può in particolare proporsi lo studio del movimento rettilineo della sfera, quando sfera e liquido si trovino sottoposti all'azione della gravità. Si perviene ad un'equazione funzionale da cui si ricava nel modo più generale l'espressione della velocità della sfera sotto forma di una serie, convergente per qualunque valore del tempo.

Da questa espressione si deduce, con procedimento rigoroso, ciò che si era ammesso finora solo per intuizione fisica, cioè che la caduta della sfera tende a divenire uniforme, con la velocità che le compete nel moto stazionario, quando si fanno equilibrio il peso e la resistenza diretta.

L'equazione funzionale che regge il periodo variabile della caduta è stata stabilita dal sig. Basset [2]. Egli ne ha costruito un integrale approssimato profittando della piccolezza del coefficiente di attrito. Quanto alla soluzione esatta il Basset osserva « It seems almost hopeless to attempt to determine the complete value ».

(1) Vedi la formola (25) della mia Nota: *Sul moto di una sfera in un liquido viscoso*, Rend. Acc. Lincei, 2 giugno 1907.

(2) *A Treatise on Hydrodynamics*, vol. II, pag. 291.

Apparirà dalla presente Nota come le attuali risorse dell'analisi permettano agevolmente di effettuare tale integrazione in modo esauriente.

1. Si consideri una sfera di raggio a, massa M e densità η, immersa in un liquido incomprimibile, viscoso, indefinito di densità ϱ. La sfera ed il liquido essendo soggetti alla gravità, sia la sfera dotata di moto traslatorio, ed il suo centro descriva la verticale con la velocità $V(t)$.

Si suppone che il sistema si trovi inizialmente in quiete. Assumendo per asse z la verticale passante per il centro della sfera, indichi Z la resistenza diretta che essa incontra nel suo moto attraverso il liquido, e g l'accelerazione della gravità; avremo allora per il moto della sfera l'equazione

$$M\,V'(t) = Mg - Z. \tag{1}$$

Per la resistenza Z si ha

$$Z = 6\pi a k\, V(t) + \frac{M'}{2} V'(t) + M'g + 6a^2\sqrt{\pi k \varrho}\int_0^t \frac{V'(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \tag{2}$$

essendo k il coefficiente di attrito interno ed M' la massa del liquido spostato; la (1) assume così la forma

$$V'(t) + \lambda\nu V(t) - \gamma = -\mu\nu^{\frac{1}{2}}\int_0^t \frac{V'(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \tag{3}$$

avendo posto

$$\lambda = \frac{9\varrho}{a^2(2\eta+\varrho)}, \quad \mu = \frac{a\lambda}{\sqrt{\pi}}, \quad \gamma = \frac{2(\eta-\varrho)\,g}{2\eta+\varrho}, \tag{4}$$

ed indicando $\nu = \frac{k}{\varrho}$ il coefficiente cinematico di viscosità del liquido. Si tratta ora di trarre dalla (3) il valore della $V(t)$.

Seguendo il criterio delle approssimazioni successive, poniamo

$$V(t) = \sum_0^\infty {}_n\, W_n(t), \tag{5}$$

e determiniamo le W mediante le equazioni

$$W_0'(t) + \lambda\nu W_0(t) = \gamma, \tag{6}$$

$$W_n'(t) + \lambda\nu W_n(t) = -\mu\nu^{\frac{1}{2}}\int_0^t \frac{W_{n-1}'(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \tag{7}$$

con la condizione di essere nulle per $t = 0$.

Si verifica immediatamente che, nell'intervallo di tempo in cui la serie (5) è convergente, la sua somma fornisce la soluzione cercata della (3).

Le (6) e (7) si integrano immediatamente e danno, tenendo conto della condizione iniziale,

$$W_0(t) = \frac{\gamma}{\lambda\nu}(1 - e^{-\lambda\nu t}), \tag{8}$$

$$W_n(t) = -\mu\nu^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda\nu t} \int_0^t e^{\lambda\nu u} du \int_0^u \frac{W'_{n-1}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{u-\tau}}. \tag{9}$$

È conveniente per il nostro scopo dare alle $W_n(t)$ un'altra forma valendosi della funzione

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{e^{-\lambda\nu\tau}\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = e^{-\lambda\nu t} \int_0^t \frac{e^{\lambda\nu\tau}\, d\tau}{\sqrt{\tau}} \tag{10}$$

già introdotta dal Basset.

La $\Phi(t)$ è una funzione del suo argomento sempre finita per valori positivi comunque grandi, e si annulla tanto per $t = 0$ quanto per $t = \infty$. La sua derivata prima si può mettere sotto la forma

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - \lambda\nu\, \Phi(t), \tag{11}$$

da cui apparisce che essa è sempre finita, per t positivo, salvo che per $t = 0$, dove diviene infinita di ordine $\frac{1}{2}$.

Ciò posto, riprendiamo la (9); invertendo l'integrazioni con la regola di Diriclet essa può essere scritta

$$W_n(t) = -\mu\nu^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda\nu t} \int_0^t W'_{n-1}(\tau)\, d\tau \int_\tau^t \frac{e^{\lambda\nu u}\, du}{\sqrt{u-\tau}},$$

ma è anche

$$\int_\tau^t \frac{e^{\lambda\nu u}\, du}{\sqrt{u-\tau}} = \int_0^{t-\tau} \frac{e^{\lambda\nu(\tau+\xi)}}{\sqrt{\xi}}\, d\xi = e^{-\lambda\nu t}\, \Phi(t-\tau),$$

quindi risulta

$$W_n(t) = -\mu\nu^{\frac{1}{2}} \int_0^t W'_{n-1}(\tau)\, \Phi(t-\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

a cui, con una integrazione per parti, notando che $W_{n-1}(\tau)\, \Phi(t-\tau)$ è nullo ai limiti, si può dare l'altra forma

$$W_n(t) = -\mu\nu^{\frac{1}{2}} \int_0^t W_{n-1}(\tau)\, \Phi'(t-\tau)\, d\tau. \tag{12'}$$

Si ricordi ora che per due qualsivogliano funzioni reali $H(x)$, $h(x)$ (finite o no, purchè) integrabili insieme ai rispettivi prodotti e quadrati in un intervallo l, L, vale la diseguaglianza fondamentale di Schwarz

$$(13) \qquad \left|\int_l^L H(x)\, h(x)\, dx\right|^2 \leq \int_l^L \overline{H(x)}^2 . dx . \int_l^L \overline{h(x)}^2 . dx .$$

Poniamo in questa per H(x) il prodotto $f(x) . g(x)$ (con f, g nuove funzioni integrabili insieme ai loro quadrati e quarte potenze) ed estraendo la radice quadrata, osservando che per la (13) stessa è

$$\int_l^L \overline{f(x)}^2 . \overline{g(x)}^2\, dx \leq \left|\sqrt{\int_l^L \overline{f(x)}^4\, dx}\ \sqrt{\int_l^L \overline{g(x)}^4\, dx}\right| ,$$

otteniamo

$$(14) \qquad \begin{aligned} &\left|\int_l^L f(x)\, g(x)\, h(x)\, dx\right| \leq \\ &\leq \left|\sqrt[4]{\int_l^L \overline{f(x)}^4\, dx} . \sqrt[4]{\int_l^L \overline{g(x)}^4\, dx} . \sqrt{\int_l^L \overline{h(x)}^2 . dx}\right| . \end{aligned}$$

Ora nell'intervallo o, t la $\Phi'(t-\tau)$ è finita, fuorchè per $\tau = t$, ove diviene infinita come $\dfrac{1}{\sqrt{t-\tau}}$. Quindi se si indica con p un numero positivo e comunque piccolo, il prodotto $(t-\tau)^p\, \Phi'(t-\tau)$ è funzione integrabile nell'intervallo $0, t$ insieme al proprio quadrato; d'altra parte, per $p < \frac{1}{4}$, è anche $(t-\tau)^{-p}$ integrabile insieme alla sua quarta potenza. Ritenendo pertanto che sia p un qualunque numero positivo minore di $\frac{1}{4}$ possiamo applicare la diseguaglianza (14) alla (12)' scritta sotto la forma

$$(12)'' \qquad W_n(t) = \int_0^t W_{n-1}(\tau) . (t-\tau)^{-p} (-\mu\nu^{\frac{1}{2}} (t-\tau)^p\, \Phi'(t-\tau))\, d\tau ,$$

facendo corrispondere $W_{n-1}(\tau)$ alla f, la $(t-\tau)^{-p}$ alla g, e la $-\mu\nu^{\frac{1}{2}} \times$ $\times (t-\tau)^p\, \Phi'(t-\tau)$ alla h.

Se si osserva che, prefissato un valore T a piacere, per $t <$ T i due integrali

$$\int_0^t (t-\tau)^{-4p}\, d\tau \quad , \quad \int_0^t \mu^2\nu (t-\tau)^{2p}\, \overline{\Phi'(t-\tau)}^2\, d\tau$$

restano finiti, si ottiene

$$(15) \qquad |W_n(t) \leq C \sqrt[4]{\int_0^t \overline{W_{n-1}(\tau)}^4 . d\tau} ,$$

designando C una opportuna costante positiva (che può dipendere da T ma non dall'indice n). È evidentemente lecito prenderla tale che fra 0 e T sia sempre $|W_0(t)| < C$ $\left(\text{si osservi che è in ogni caso } W_0(t) < \frac{\gamma}{\lambda\nu}\right)$; allora è facile verificare che si ha, per $t < T$

$$|W_n(t)| < C^{n+1} \sqrt[4]{\frac{t^n}{n!}}. \tag{16}$$

Infatti, supposta la (16) verificata sino ad un valore generico $n-1$ dell'indice, essa rimane valida anche per il valore successivo. Ciò si ricava ovviamente dalla (15) sostituendo alla $W_{n-1}(\tau)$ la quantità maggiore $C^n \sqrt[4]{\frac{\tau^{n-1}}{n-1\,!}}$.

Per la (16) si può allora concludere che la serie $\sum_0^\infty {}_n W_n(t)$ è convergente, essendolo quella di termine generale $C^{n+1}\sqrt[4]{\frac{t^n}{n!}}$, in quanto il rapporto del termine ennesimo al precedente è $C\sqrt[4]{\frac{t}{n}}$, convergente a zero al crescere indefinito di n.

La serie (5) convergente per $t < T$, essendo T un valore prefissato a piacere, fornisce così la soluzione cercata della (3).

2. Passiamo a stabilire quale è il valore limite di $V(t)$, per t crescente indefinitamente.

Si ponga

$$U_n(\alpha) = \int_0^\alpha W_n(t)\, dt\,; \tag{17}$$

se le (7) si moltiplicano per dt e si integrano fra 0 ed α, tenendo conto che $W_n(0) = 0$, otteniamo

$$W_n(\alpha) + \lambda\nu \int_0^\alpha W_n(t)\, dt = -\mu\nu^{\frac{1}{2}} \int_0^\alpha dt \int_0^t \frac{W'_{n-1}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{18}$$

Ora si osservi che

$$\int_0^\alpha dt \int_0^t \frac{W'_{n-1}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \int_0^\alpha W'_{n-1}(\tau)\, d\tau \int_\tau^\alpha \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}} = 2\int_0^\alpha W'_{n-1}(\tau)\sqrt{\alpha-\tau}\, d\tau,$$

quindi con una integrazione per parti, essendo $W_{n-1}(\tau)\sqrt{\alpha-\tau}$ nullo ai limiti si ricava

$$\int_0^\alpha dt \int_0^t \frac{W'_{n-1}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \int_0^\alpha \frac{W_{n-1}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha-\tau}}.$$

Ma per la (17) è $U'_n(\alpha) = W_n(\alpha)$, perciò abbiamo per le U_n le formole ricorrenti

$$(18)' \qquad U'_n(\alpha) + \lambda\nu\, U_n(\alpha) = -\mu\nu^{\frac{1}{2}} \int_0^\alpha \frac{U'_{n-1}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha - \tau}},$$

dalle quali, come già le W_n dalle (7), si ricava

$$(19) \qquad U_n(\alpha) = -\mu\nu^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda\nu\alpha} \int_0^\alpha e^{\lambda\nu u}\, du \int_0^u \frac{U'_{n-1}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{u - \tau}}.$$

Per la nota regola dell' Hôspital si ha

$$\lim_{\alpha=\infty} U_n(\alpha) = -\mu\nu^{\frac{1}{2}} \lim_{\alpha=\infty} \frac{\int_0^\alpha e^{\lambda\nu u}\, du \int_0^u \frac{U'_{n-1}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{u-\tau}}}{e^{\lambda\nu\alpha}} =$$

$$-\frac{\mu\nu^{\frac{1}{2}}}{\lambda\nu} \lim_{\alpha=\infty} \int_0^\alpha \frac{U'_{n-1}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\alpha - \tau}};$$

ma confrontando con la (18)′ si ricava

$$\lim_{\alpha=\infty} U'_n(\alpha) = 0,$$

il che è quanto dire, per la (17),

$$\lim_{t=\infty} W_n(t) = 0:$$

così abbiamo in conclusione

$$\lim_{t=\infty} V(t) = \lim_{t=\infty} W_0(t) = \frac{\gamma}{\lambda\nu}.$$

Questo ci dice che il moto della sfera tende a diventare uniforme, la velocità assumendo il valore limite

$$V = \frac{\gamma}{\lambda\nu} = \frac{2a^2}{9k} (\eta - \varrho)\, g,$$

che è l'espressione nota, dovuta a Stokes, corrispondente al moto stazionario.

Tale formola ha assunto in questi ultimi tempi una speciale importanza per la brillante applicazione fattane dai sigg. H. A. Wilson e J. J. Thomson alla determinazione della carica di un elettrone.