

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Fisica matematica. — *Traiettorie e onde luminose in un particolare mezzo isotropo e non omogeneo.* Nota di ANTONIO GARBASSO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Ho pubblicato recentemente ⁽¹⁾ un metodo, che permette di calcolare la forma delle traiettorie e delle onde luminose per un mezzo isotropo qualunque, del quale sia noto l'indice in funzione delle coordinate.

Applicavo il procedimento in discorso al caso particolare in cui è

$$(1) \quad n = \frac{1}{a + bx},$$

con a e b costanti, e facevo vedere che l'onda di codesto mezzo è una sfera con l'equazione

$$(2) \quad \left[x - \frac{a}{2b} (e^{bt} + e^{-bt} - 2) \right]^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4b^2} (e^{bt} - e^{-bt})^2.$$

I punti nei quali la sfera è forata dall'asse x sono dati da

$$x = \frac{a}{b} (e^{\pm bt} - 1),$$

e se b è positivo una di queste ascisse tende al valore limite

$$- a/b.$$

Fisicamente la cosa si intende assai bene, perchè nel piano

$$x = - a/b$$

l'indice è infinito e la velocità di propagazione è nulla. Trascorso un tempo sufficiente dall'inizio del fenomeno l'onda continua bensì ad allargarsi e ad avanzare, ma come una bolla di sapone, che si gonfia senza staccarsi dalla canna.

Ad ogni modo la forma della superficie rimane la stessa per ogni valore di t .

2. Assai diversamente vanno invece le cose, quando l'indice sia legato alla coordinata x dalla relazione

$$(3) \quad n^2 = n_0^2 + ax.$$

⁽¹⁾ A. Garbasso, *Traiettorie e onde luminose in un mezzo isotropo qualunque* (Rend. R. Acc. dei Lincei, (5), XVI, [2], 41, 1907).

È un caso questo, che fu studiato a suo tempo da Biot, per ciò che riguarda almeno la forma e il numero e la posizione delle traiettorie. La (3) ha poi un'importanza tutta speciale dal punto di vista pratico, potendosi considerare come una prima approssimazione per il processo che dà origine al miraggio di Monge (1).

Lo studio del problema dipende da quello della equazione alle derivate parziali

$$-2h(n_0^2 + ax) + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 0, \quad (9)$$

della quale è soluzione completa la

$$W = \alpha y + \frac{1}{3ha} [2h(n_0^2 + ax) - \alpha^2]^{\frac{3}{2}}. \quad (10)$$

Come è noto si ottengono subito di qui gli integrali

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha', \\ -t + \frac{\partial W}{\partial h} = -t_0, \end{array} \right.$$

e nel caso nostro

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} y - \frac{2\alpha}{a} \sqrt{n_0^2 + ax - \alpha^2} + \frac{2\alpha}{a} \sqrt{n_0^2 - \alpha^2} = 0, \\ -t - \frac{4}{3a} (n_0^2 + ax - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2(n_0^2 + ax)}{a} \sqrt{n_0^2 + ax - \alpha^2} + \\ \quad + \frac{4}{3a} (n_0^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n_0^2}{a} \sqrt{n_0^2 - \alpha^2} = 0 \quad (2). \end{array} \right.$$

L'equazione dell'onda risulta dalle (4), eliminando fra esse la α .

Noi poniamo anzitutto

$$(5) \quad \lambda^2 = n_0^2 + ax - \alpha^2,$$

$$(6) \quad \mu^2 = n_0^2 - \alpha^2,$$

e le (4) assumeranno la forma più semplice

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} y - \frac{2\alpha}{a} (\lambda - \mu) = 0, \\ -t - \frac{4}{3a} (\lambda^3 - \mu^3) + \frac{2n_0^2}{a} (\lambda - \mu) + 2x\lambda = 0. \end{array} \right.$$

(1) A. Garbasso, *Il miraggio* (Mem. R. Acc. d. Sc. di Torino, (2), LVIII, 1, 1907).

(2) L'onda parte dall'origine delle coordinate all'origine dei tempi. Si assume $2h = 1$.

Dalle (5) e (6) viene

$$(7) \quad \lambda^2 - \mu^2 = (\lambda + \mu)(\lambda - \mu) = ax,$$

e dalla prima delle (4')

$$(8) \quad \lambda - \mu = \frac{ay}{2\alpha},$$

e dividendo membro a membro (7) per (8)

$$(9) \quad \lambda + \mu = \frac{2\alpha x}{y}.$$

A loro volta le (8) e (9) danno subito

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}(p + q), \\ \mu = \frac{1}{2}(p - q), \end{cases}$$

con

$$p = 2\alpha x/y, \quad q = ay/2\alpha;$$

e le (10) permettono di stabilire l'identità algebrica

$$\frac{2\mu^2}{a}(\lambda - \mu) + 2x\lambda = \frac{2}{a}(\lambda^3 - \mu^3),$$

per la quale la seconda delle (4') si trasforma nella

$$-t + \frac{2}{3a}(\lambda^3 - \mu^3) + \alpha y = 0.$$

Riassumendo, le equazioni nostre (5), (6) e (4') sono sostituibili con le quattro

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}(p + q), \\ \mu = \frac{1}{2}(p - q), \\ \mu^2 = a^2 - \alpha^2, \\ -t + \frac{2}{3a}(\lambda^3 - \mu^3) + \alpha y = 0 \quad (1). \end{cases}$$

(¹) La quarta di queste equazioni ha un interesse geometrico particolare. Proviamoci infatti a derivarla rispetto ad α ; otterremo facilmente

$$\frac{2}{a} \left(\lambda^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} - \mu^2 \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right) + y = 0,$$

ma

$$\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \mu \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = -\alpha,$$

e dunque

$$\lambda - \mu = \frac{ay}{2\alpha},$$

che è la prima delle (4'); vuol dire che la superficie d'onda è l'involuppo delle superficie

$$-t + \frac{2}{3a}(\lambda^3 - \mu^3) + \alpha y = 0.$$

Si prenderanno adesso i valori di λ e μ dalla prima e dalla seconda di queste equazioni, e si introdurranno nella terza e nella quarta. Viene

$$\begin{cases} 4(x^2 + y^2) \alpha^4 - 2y^2(2n_0^2 + ax) \alpha^2 + \frac{a^2 y^4}{4} = 0, \\ (x^2 + y^2) \alpha^4 - yt\alpha^3 + \frac{a^2 y^4}{48} = 0, \end{cases}$$

o ancora

$$\begin{cases} 4yt\alpha^3 - 2y^2(2n_0^2 + ax) \alpha^2 + \frac{a^2 y^4}{6} = 0, \\ (x^2 + y^2) \alpha^4 - yt\alpha^3 + \frac{a^2 y^4}{48} = 0. \end{cases}$$

Le ultime uguaglianze hanno la forma

$$\begin{cases} a_0 \alpha^3 + a_1 \alpha^2 + a^3 = 0, \\ b_0 \alpha^4 + b_1 \alpha^3 + b_4 = 0, \end{cases}$$

risultato dell'eliminazione è dunque la

$$(12) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 \\ b_0 & b_1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix} = 0,$$

la quale rappresenta appunto la superficie d'onda.

Svolgendo si trova

$$(12') \quad a^4 C^3 + 6a^2 B^2 C^2 - 54a^2 t^2 BC + 9B^4 C - 18t^2 B^2 + 81a^2 t^4 = 0,$$

dove si è posto per semplicità

$$(13) \quad B = 2n_0^2 + ax,$$

$$(14) \quad C = x^2 + y^2.$$

Per $a = 0$ la (12') fornisce

$$BC = 2t^2,$$

ossia

$$x^2 + y^2 = \frac{t^2}{n_0^2},$$

come si poteva prevedere. Escluso questo caso si moltiplichi la (12') per a^2 , e si ponga ancora

$$(15) \quad A = a^2 C,$$

$$(16) \quad \theta = 3at;$$

verrà

$$(17) \quad A^3 + 6A^2 B^2 - 6AB\theta^2 + 9AB^4 - 2B^3\theta^2 + \theta^4 = 0,$$

o, che fa lo stesso,

$$(18) \quad [B(3A + B^2) - \theta^2]^2 = (B^2 - A)^3$$

È l'onda cercata.

3. La (18) rappresenta una linea di sesto ordine, simmetrica rispetto all'asse delle x .

Viene subito

$$\theta^2 = B(3A + B^2) \pm (B^2 - A)^{\frac{3}{2}};$$

scelti a caso x e y si avranno dunque due valori reali, o se ne avrà uno solo o nessuno per la θ , secondo che è

$$B^2 - A \geq 0.$$

Questo vuol dire che un punto sarà incontrato due volte, una o nessuna dalla perturbazione luminosa, secondo che è dentro o sopra la linea

$$(19) \quad B^2 = A$$

o fuori di essa.

La (19) rappresenta una parabola, avente per asse l'asse delle x , con la concavità rivolta verso le x positive e il vertice nel punto

$$x = -n_0^2/a, \quad y = 0.$$

La parabola (19) si era già presentata a Biot, come involuppo delle traiettorie

$$\lambda - \mu = \frac{ay}{2\alpha}.$$

4. L'onda (18) può assumere tre forme caratteristiche, le quali si distinguono per il numero dei punti doppi da esse posseduti.

La cosa risulta dalla considerazione che i punti doppi si avranno annullando separatamente i due membri della (18), ponendo dunque

$$\begin{cases} B(3A + B^2) - \theta^2 = 0, \\ B^2 - A = 0, \end{cases}$$

o, che fa lo stesso,

$$\begin{cases} 4B^3 - \theta^2 = 0, \\ B^2 - A = 0. \end{cases}$$

Eliminando fra queste la x si ottiene

$$y = \pm \frac{2n_0}{a} \sqrt{\left(\frac{\theta^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - n_0^2};$$

vi sono dunque due punti doppi, o ve n'è uno solo, o non ve n'è nessuno, secondo che

$$(20) \quad \theta \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 2n_0^3.$$

È poi evidente che i punti doppi stanno su la parabola (19), e quando si riducono ad uno coincidono col vertice di quest'ultima.

Con calcoli noti si riconosce infine che i punti doppi della nostra curva sono altrettante cuspidi.

5. Le forme caratteristiche dell'onda per i diversi tempi si rilevano dal diagramma. In esso ho preso

$$n_0 = a = 1,$$

ed ho ingrandito ascisse e ordinate nel rapporto di 3 ad 1.

La condizione (20) assume ora la forma

$$\theta \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 2;$$

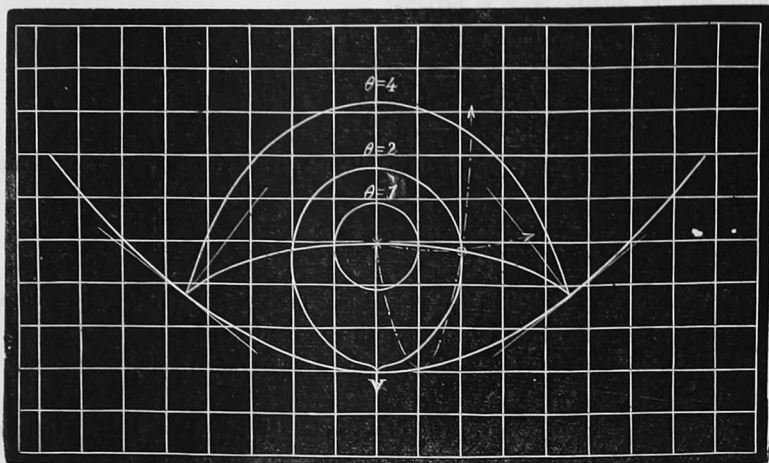
ho calcolato quindi le curve corrispondenti ai valori

$$\theta = 1, \quad \theta = 2, \quad \theta = 4.$$

La linea ha da principio ($\theta = 1$) una figura tondeggiante e molto vicina a quella di una circonferenza di cerchio, col centro leggermente spostato verso le x negative. È naturale che sia così, poichè per piccole x si può scrivere

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{n_0^2 + ax} = \sqrt{1 + x}, \\ &= 1 + \frac{x}{2}, \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x}, \end{aligned}$$

e si ricade dunque nella legge espressa dalla formola (1).



Per $\theta = 2$ l'onda raggiunge la parabola (19), rappresentata anch'essa nel disegno, con un tratto alquanto più marcato, e la fora con una cuspidi nel vertice.

Immediatamente dopo la cuspidi si sdoppia, e fra le cuspidi nuove compare un rigonfiamento, con la convessità voltata verso l'alto. Le due cuspidi scorrono lungo la grande parabola e si allontanano risalendo a destra e a sinistra.

Per $\theta = 4$ l'onda ripassa per l'origine, dalla quale fu emessa al tempo zero.

La superficie tende nel seguito a conservare la sua forma, almeno in quanto le cuspidi rimangono indietro dalla fronte di un tratto costante. Si osserverà infatti che la fronte dell'onda ha per ascissa

$$X = \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\theta + 2n_0^3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} - n_0^2 \right],$$

mentre le cuspidi hanno l'ascissa

$$\xi = \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\theta}{2} \right)^{\frac{2}{3}} - 2n_0^2 \right];$$

viene dunque

$$a \frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{1}{3} \left(\frac{\theta + 2n_0^3}{2} \right)^{-\frac{1}{3}},$$

$$a \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{1}{3} \left(\frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

le quali velocità tendono a coincidere per valori un po' grandi del tempo.

6. Il fatto che l'onda ripassa due volte per un medesimo punto ha il suo riscontro nella circostanza, segnalata da Biot, che ogni posizione interna alla parabola (19) si congiunge all'origine con due traiettorie luminose possibili. Ho descritto, per mettere la cosa in chiaro, i due raggi parabolici passanti per uno dei punti di intersezione delle onde $\theta = 2$ e $\theta = 4$ (1).

Come appare dal disegno, ognuna delle traiettorie risulta normale all'onda corrispondente, ma una volta la direzione della propagazione è secondo la normale esterna, e l'altra secondo la normale interna.

Geologia. — *Revisione della fauna oligocenica di Laverda nel Vicentino.* Nota di G. CANESTRELLI, presentata dal Socio CARLO DE STEFANI.

La Val di Laverda o Lavarda è una località dei Sette Comuni nella provincia di Vicenza già nota, in quanto di essa ebbero ad occuparsi innumerevoli autori, e dal punto di vista paleontologico in modo speciale Bayan, Fuchs, Suess ed in tempi recenti Oppenheim. Questi si diffuse sui rapporti stratigrafici e stabili alcuni confronti faunistici, aggiungendo le sue alle determinazioni sparse negli autori precedenti.

La fauna dei depositi della Val di Laverda è ricchissima, ed io ho potuto studiarne numerosi esemplari provenienti in parte dalla Collezione Secco e da una raccolta donata dall'avv. Vescovi al prof. De Stefani, che si conserva nel Museo Geologico dell'Ist. di S. S. di Firenze e in parte da una raccolta fatta da me sul posto.

Le specie determinate sono le seguenti. Segno con un asterisco le specie comuni coi giacimenti del Bormidiano, o Tongriano, o Miocene inferiore od Oligocene che dir si voglia del Piemonte e della Liguria. Le specie in corsivo appartengono anche all'eocene.

PROTOZOA.

* *Nummulites intermedius* D'Arch. * *Nummulites Fichteli*. Micht.

ZOANTHARIA.

<i>Dendracis seriata</i> Reuss.	<i>Antillia</i> cfr. <i>cylindroides</i> Reuss.
<i>Dendrophillia vicentina</i> n. sp.	* <i>Montlivaultia carcarenensis</i> Micht.
<i>Phyllocenia lucasana</i> Defr.	<i>Trochosmia alpina</i> Michel.
* <i>Cyatomorpha rocchettina</i> Mich.	<i>Flabellum appendiculatum</i> Brongn.
<i>Rabdophyllia tenuis</i> Reuss.	

(1) Sono segnati nel diagramma con un tratto discontinuo.