ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Sopra alcune equazioni integrali*. Nota di LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrisp. T. LEVI-CIVITA.

Se $K(x, y, \dots ; \xi, \eta, \dots)$ rappresenta una data funzione dei due punti $x, y, \dots ; \xi, \eta, \dots$ di un campo τ; se $F(x, y, \dots)$ rappresenta anch'essa una data funzione del punto $x, y, \dots$; e se φ è una funzione incognita, la equazione integrale

$$(I) \qquad \varphi(x, \dots) = F(x, \dots) + \lambda \int_\tau K(x, \dots ; \xi, \dots)\, \varphi(\xi, \dots)\, d\tau$$

(dove λ è una costante nota, e $d\tau$ indica l'elemento del campo τ che intornia il punto $\xi, \eta, \dots$) è stata, in questi ultimi tempi, profondamente studiata.

Un potente impulso a questo ordine di studî, che hanno condotto a deduzioni per generalità ed importanza utilissime, è stato dato da I. Fredholm, il quale ha considerato il problema di determinare φ come caso limite di un problema d'algebra; tale concetto era già stato intuito dal Volterra a proposito di un'equazione integrale affine alla (I). Le ricerche ulteriori di D. Hilbert e della sua scuola (nella quale è da segnalarsi principalmente lo Schmidt) hanno approfondito il problema, specialmente in ciò che si riferisce ai valori della costante λ. Tali ricerche hanno permesso grandi sintesi, mostrando la possibilità di collegare campi, che erano separati fra di loro, ed anche molto difficilmente accessibili.

In questa breve Nota, noi accenneremo a un problema, il quale costituisce un'estensione di quello finora richiamato. Il nostro accenno, anche per la difficoltà e relativa lunghezza che l'intera ricerca presenta, si limiterà all'esposizione di risultati parziali ed imperfetti; ma abbiamo fiducia che ciò non sia interamente inutile, e che possa rendere non difficile un ulteriore svolgimento.

Consideriamo l'equazione integrale

$$(II) \qquad \varphi = F + \lambda \int_\tau K f(\varphi)\, d\tau$$

dove f è simbolo di una data funzione. Abbiamo omesso i parametri per brevità di scrittura: fuori dall'integrale si leggerà $\varphi(x, y, \dots)$, $F(x, y, \dots)$, ed entro l'integrale si leggerà $K(x, y, \dots ; \xi, \eta, \dots)$, $\varphi(\xi, \eta, \dots)$ come nella (I).

Noi ci limiteremo per ora a studiare la (II) per una forma molto particolare della f; e scriveremo al posto della (II) l'equazione seguente:

$$(1) \qquad \varphi = F + \lambda \int_\tau K \varphi^2\, d\tau .$$

Supponiamo che esista un numero Φ, tale che non debba essere oltrepassato da $|\varphi|$ nel campo. A noi basta che tale numero Φ esista, e, se nelle applicazioni importa molto conoscerlo, in teoria ciò non è necessario [1].

Adopereremo, per risolvere la (1), un procedimento di approssimazioni successive.

Se, invece della (1), poniamo

$$\varphi + \varepsilon_1 = \mathrm{F},$$

l'errore

$$\varepsilon_1 = -\lambda \int \mathrm{K}\,\varphi^2\, d\tau$$

verifica l'inuguaglianza

$$|\varepsilon_1| < |\lambda|\,\Phi^2 \int_\tau |\mathrm{K}|\, d\tau .$$

Se stabiliamo che sia

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{3\Phi \int_\tau |\mathrm{K}|\, d\tau}, \tag{2}$$

dove α è una costante positiva <1, la precedente inuguaglianza si può scrivere:

$$|\varepsilon_1| < \frac{\alpha\Phi}{3}. \tag{3}$$

Ora, in seconda approssimazione, scriveremo:

$$\varphi + \varepsilon_2 = \mathrm{F} + \lambda \int_\tau \mathrm{K}(\varphi + \varepsilon_1)^2\, d\tau = \mathrm{F} + \int_\tau \mathrm{KF}^2\, d\tau .$$

L'errore sarà:

$$\varepsilon_2 = \lambda \int_\tau (2\varphi\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2)\, d\tau ;$$

ed è facile vedere che, per la (2) e per la (3), si può scrivere:

$$|\varepsilon_2| < \frac{\alpha}{3\Phi}|2\varphi\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2| < \frac{\alpha}{3\Phi}|\varepsilon_1|\,|2\Phi + \varepsilon_1| < \frac{\alpha}{3\Phi}|\varepsilon_1|\, 3\Phi < \frac{\alpha^2\Phi}{3} .$$

Se ancora, in terza approssimazione, poniamo:

$$\varphi + \varepsilon_3 = \mathrm{F} + \lambda \int_\tau \mathrm{K}(\varphi + \varepsilon_2)^2\, d\tau = \dots$$

(dove $\varphi + \varepsilon_2$ s'intende dato dalla precedente espressione $\mathrm{F} + \int_\tau \mathrm{KF}^2\, d\tau$,

[1] Basta opportunamente scegliere le unità di misura per impicciolire Φ quanto si vuole, ma ciò, beninteso, altera anche le altre grandezze e non è sempre conveniente in pratica.

relativa qui al polo $\xi, \eta, \ldots$), l'errore

$$\varepsilon_3 = \lambda \int_\tau \mathrm{K}(2\varphi\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)\, d\tau$$

verifica la relazione

$$|\varepsilon_3| < \frac{\alpha}{3\Phi}|2\varphi\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2| < \frac{\alpha}{3\Phi}|\varepsilon_2|\,|2\Phi + \varepsilon_2| < \frac{\alpha}{3\Phi}|\varepsilon_2|\, 3\Phi < \frac{\alpha^3\Phi}{3}.$$

Continuando, si vede che l'errore

$$\varepsilon_\nu = \lambda \int_\tau \mathrm{K}(\varphi + \varepsilon_{\nu-1})^2\, d\tau$$

verifica la relazione

$$|\varepsilon_\nu| < \frac{\alpha^\nu\Phi}{3}.$$

Ora, per ν infinito, il secondo membro tende a zero, dunque l'errore tende a zero per ν infinito.

Se, dunque, la funzione F fosse nulla, le successive grandezze $\varphi + \varepsilon_1$, $\varphi + \varepsilon_2, \ldots$ sarebbero tutte nulle e φ risulterebbe nulla.

Tutto ciò appare valido soltanto quando sia valida la restrizione (2). Noi vogliamo ora (ed è questa la cosa più importante) *liberarci da questa restrizione.*

Nella (1) poniamo $c\psi$ al posto di φ (con c rappresentiamo una costante). Allora la (1) diventa

$$(1)' \qquad \psi = \frac{\mathrm{F}}{c} + c\lambda \int_\tau \mathrm{K}\psi^2\, d\tau.$$

Quest'equazione, perfettamente analoga alla (1), contiene $\frac{\mathrm{F}}{c}$ al posto di F, il che poco importa, e poi contiene $c\lambda$ al posto di λ. Basta fissare c in modo che $|c\lambda|$ verifichi la (2) per ricavare ψ dalla (1)' con quell'approssimazione η che si vuole. Moltiplicando ψ per c, si ricaverà φ con approssimazione $c\eta$ (numero perfettamente arbitrario che può sempre pensarsi $< \eta$). E si potrà dire in generale che *alla condizione* $\mathrm{F} = 0$ *corrisponde soltanto* [1] *la soluzione* $\varphi = 0$ *della* (1).

Cosa analoga, come è noto, non capita per la (I), anzi esistono valori speciali di λ (*Eigenwerthe*) per i quali a $\mathrm{F} = 0$ può *non* corrispondere $\varphi = 0$.

Se, invece della (1), avessimo considerato l'equazione

$$\varphi = \mathrm{F} + \lambda \int_\tau \mathrm{K}\,\varphi^m\, d\tau,$$

[1] Noi non consideriamo quelle soluzioni che diventano infinite per $\lambda = 0$. Di ciò parleremo in una prossima Memoria.

con m positivo arbitrario (diverso da 1), saremmo giunti, in modo più complicato ma perfettamente analogo, al risultato che abbiamo dimostrato per la (1).

Se avessimo considerato l'equazione

$$\varphi = \mathrm{F} + \lambda \int_\tau \mathrm{K}(\varphi + \varphi^2)\, d\tau\,, \tag{4}$$

la sostituzione $\varphi = \varphi' - \frac{1}{2}$ ci avrebbe condotti a

$$\varphi' = \mathrm{F} + \frac{1}{2} - \lambda \int_\tau \frac{\mathrm{K}}{4}\, d\tau + \lambda \int_\tau \mathrm{K}\, \varphi'^2\, d\tau$$

diversa soltanto dalla (1) per avere la funzione nota $\mathrm{F} + \frac{1}{2} - \lambda \int_\tau \frac{\mathrm{K}}{4} d\tau$ al posto della funzione nota F. La nullità di F non impegna, per quest'ultima equazione (4), la nullità di φ.

Ed ora, per non dilungarci, noi ci limiteremo ad enunciare un teorema, che ormai risulta abbastanza semplice.

Se $f(\varphi)$ è una funzione (della variabile φ) sviluppabile come segue:

$$f(\varphi) = a_2 \varphi^2 + a_3 \varphi^3 + a_4 \varphi^4 + \cdots,$$

l'equazione integrale

$$\varphi = \lambda \int_\tau \mathrm{K}\, f(\varphi)\, d\tau$$

ha, qualunque sia λ, l'unica soluzione $\varphi = 0$.

Notiamo che questo teorema non è più valido (ma continua ad essere valido il nostro metodo di risoluzione) quando lo sviluppo ha la forma $a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots$. Se poi esso non si riduce identicamente ad $a_1\varphi$, allora siamo nel noto caso dell'equazione di Fredholm.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota di Eugenio Elia Levi, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

1. Il risultato fondamentale della bella teoria delle equazioni integrali della forma

$$\varphi(x) + \int_a^b k(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{1}$$

è stato stabilito dal Fredholm [1] nell'ipotesi che la funzione caratteristica $k(xy)$ restasse sempre finita nel campo $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, od anche divenisse infinita nei punti $x \equiv y$ di ordine $\leq \frac{1}{(x-y)^\alpha}$, dove α indica un

[1] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Math. 27.