ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Integrazione dell'equazione funzionale che regge la caduta di una sfera in un liquido viscoso.* Nota I di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrispondente LEVI-CIVITA.

Se una sfera si muove di moto lento (tale cioè che si possano trascurare i quadrati e i prodotti delle componenti della velocità e loro derivate) in seno ad un liquido viscoso, incompressibile, indefinito, in guisa che il suo centro percorra, con velocità qualsiasi, una retta, essa incontra una resistenza che si sa calcolare, e che, per un generico istante t, dipende in modo funzionale dai valori della velocità e della accelerazione in tutto l'intervallo di tempo che va dall'istante iniziale fino all'istante t [1].

Conoscendo la resistenza che la sfera incontra nel suo movimento, è naturale il proporsi lo studio del moto della sfera nel liquido. Supponendo che la sfera e il liquido, essendo soggetti alla gravità, siano inizialmente in quiete, l'equazione funzionale alla quale deve soddisfare la velocità della caduta della sfera, è stata stabilita dal Basset [2], il quale l'ha pure integrata per approssimazione, nel caso in cui il coefficiente di attrito del liquido sia molto piccolo.

In una Nota recentissima, che ha lo stesso titolo della presente (Rendiconti di questa Accademia, 2° semestre 1907), il Picciati ha integrato tale equazione, qualunque sia il valore del coefficiente d'attrito; egli ottiene l'integrale espresso mediante serie, ricorrendo al noto metodo delle approssimazioni successive.

In questa Nota io tratto il caso generale in cui il liquido e la sfera, essendo soggetti alla gravità, il liquido ha inizialmente un determinato stato di moto, e la sfera è lanciata (verticalmente) con una data velocità iniziale. Io risolvo l'equazione funzionale a cui soddisfa in tale ipotesi la velocità, mediante soli *integrali definiti*.

Ottengo questo risultato applicando semplicemente la celebre formola d'inversione di Abel, mediante la quale riesco a dedurre dall'equazione funzionale data, una equazione differenziale ordinaria di 2° ordine, a coefficienti costanti. Tale equazione differenziale si integra con procedimenti assai semplici, che permettono di ottenere la funzione incognita (velocità della sfera) espressa mediante quadrature.

Dal mio metodo d'integrazione apparisce che l'integrazione dell'equazione funzionale in questione, che, anche nel solo caso particolare in cui la

[1] Picciati, *Sul moto di una sfera in un liquido viscoso*, formola (25) (Rendiconti di questa Accademia, 1° semestre 1907).

[2] Basset, *A Treatise on Hydrodynamics*, vol. II, pag. 291 (Cambridge, a. 1888).

diede il Basset, sembrava a questi impresa pressochè disperata il tentare di risolvere in modo completo (il Basset infatti dice, a pag. 292: « It seems almost hopeless to attempt to determine the complete value »), poteva, al contrario, già farsi (e mediante quadrature), da lungo tempo, adoperando opportunamente strumenti analitici noti già ai tempi di Abel.

La formola che io trovo si presta bene ad una verifica diretta, però qui non riporto i relativi calcoli, perchè essi sono un pochino lunghi e del resto è sempre scarso l'interesse che presentano simili verifiche.

Dall'espressione della velocità deduco poi, con una quadratura, la lunghezza del cammino percorso dal centro della sfera.

In una Nota successiva applico i risultati ottenuti al caso particolare trattato dal Basset e dal Picciati, dando le formole esplicite che risolvono la questione proposta. Esse sono comodissime per il calcolo numerico della velocità, approfittando di tavole numeriche che già da tempo sono state costruite per la risoluzione di altre questioni di Analisi.

Da esse si trae subito che al crescere indefinito del tempo, il moto della sfera tende a divenire uniforme, il valor limite della velocità essendo quello corrispondente al moto stazionario, allorquando si fanno equilibrio il peso e la resistenza diretta. Si ritrova in tal modo una nota formola di Stokes (che è pure stata ottenuta dal Picciati mediante il suo sviluppo in serie), che ha assunto in questi ultimi tempi una speciale importanza, per l'applicazione che ne è stata fatta alla determinazione della carica di un elettrone.

Per ultimo determino il valor limite della velocità nel caso generale trattato nella Nota I, e dimostro che anche ora il moto della sfera, al crescere indefinito del tempo tende a diventare uniforme, la velocità limite essendo d'altra parte quella stessa data dalla formola di Stokes, nel caso del moto stazionario.

È bene osservare che questo risultato era fisicamente prevedibile, perchè la viscosità del liquido tende ad attutire gradatamente la variazione di velocità proveniente dalla velocità iniziale della sfera e dallo stato iniziale di moto del liquido, in guisa che, dopo un tempo molto grande, tutto procede come se sfera e liquido fossero stati inizialmente in quiete.

Il metodo esposto serve pure per integrare varî altri tipi di equazioni funzionali, ma su ciò mi riservo di ritornare prossimamente.

1. Converrà richiamare alcune formole note, che ci saranno assai utili.

Sia t una quantità positiva, e φ una funzione regolare nell'intervallo da 0 a t; allora si ha la formola:

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\varphi(0) + \int_0^t \frac{\varphi'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

ove φ' è la derivata di φ.

Questa formola, che di solito si dimostra trasformando il 1° membro con un integrazione per parti, può pure essere dimostrata mediante un opportuno cambiamento di variabile.

Poniamo infatti:

$$\tau = t - x^2 ,$$

allora si ha:

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 2 \int_0^{\sqrt{t}} \varphi(t - x^2)\, dx , \tag{2}$$

perciò:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 2 \frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{t}} \varphi(t-x^2)\, dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi(0) + 2 \int_0^{\sqrt{t}} \varphi'(t-x^2)\, dx ,$$

di qui segue subito la (1).

Consideriamo poi un'altra funzione regolare ψ, legata alla φ dalla formola:

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{\varphi'(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} , \tag{3}$$

allora sussisterà la formola d'inversione d'Abel:

$$\pi\left[\varphi(t) - \varphi(0)\right] = \int_0^t \frac{\psi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} . \tag{4}$$

2. Consideriamo ora una sfera di raggio R, e densità η, immersa in un liquido incompressibile, viscoso, indefinito, di densità ϱ.

Supporremo il liquido e la sfera soggetti alla gravità, inoltre la sfera dotata di moto traslatorio (lento), il cui centro descriva, con la velocità $V(t)$, la verticale, che assumeremo per asse z, ritenendo positivo il senso diretto verso il basso.

Supponiamo inoltre che vi sia simmetria rispetto alla direzione dell'asse z, cioè che il moto del liquido abbia luogo, anche inizialmente, in piani passanti per l'asse z e sia lo stesso in tutti i piani.

Supposto che inizialmente la sfera venga lanciata verticalmente con una data velocità V_0, e che lo stato iniziale del liquido sia qualunque, si tratta di determinare il movimento rettilineo della sfera considerata.

La velocità $V(t)$ all'istante (positivo) t deve allora soddisfare all'equazione funzionale:

$$V'(t) + \lambda\nu V(t) - \gamma(t) = - \mu \sqrt{\nu} \int_0^t \frac{V'(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} , \tag{5}$$

ove:

$$\lambda = \frac{9\varrho}{R^2(2\eta + \varrho)} \quad , \quad \mu = \frac{R\lambda}{\sqrt{\pi}} , \tag{I}$$

e ν indica il coefficiente cinematico di viscosità del liquido, e $\gamma(t)$ una funzione dipendente dallo stato iniziale del liquido.

Bisogna ora ricavare dalla (5) la funzione $\mathrm{V}(t)$, colla condizione iniziale:

$$\mathrm{V}(0) = \mathrm{V}_0 . \tag{6}$$

Applicando la formola (4) alla (5), che è del tipo (3), risulta:

$$-\pi\mu\sqrt{\nu}\,[\mathrm{V}(t) - \mathrm{V}(0)] = \int_0^t \frac{\mathrm{V}'(\tau) + \lambda\nu\mathrm{V}(\tau) - \gamma(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau ,$$

cioè:

$$-\pi\mu\sqrt{\nu}\,[\mathrm{V}(t) - \mathrm{V}_0] = \int_0^t \frac{\mathrm{V}'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \lambda\nu\int_0^t \frac{\mathrm{V}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau - \int_0^t \frac{\gamma(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau ,$$

ovvero, tenendo conto della (5):

$$\pi\mu^2\nu\,[\mathrm{V}(t) - \mathrm{V}_0] = \mathrm{V}'(t) + \lambda\nu\mathrm{V}(t) - \gamma(t) -$$
$$- \lambda\mu\nu\sqrt{\nu}\int_0^t \frac{\mathrm{V}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \mu\sqrt{\nu}\int_0^t \frac{\gamma(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau ;$$

derivando, ed applicando la (1) si ottiene:

$$\pi\mu^2\nu\,\mathrm{V}'(t) = \mathrm{V}''(t) + \lambda\nu\mathrm{V}'(t) - \gamma'(t) -$$
$$- \lambda\mu\nu\sqrt{\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{V}_0 + \int_0^t \frac{\mathrm{V}'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\right] + \mu\sqrt{\nu}\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\gamma(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau ,$$

cioè, ricordando la (5):

$$\pi\mu^2\nu\mathrm{V}'(t) = \mathrm{V}''(t) + \lambda\nu\mathrm{V}'(t) - \gamma'(t) -$$
$$- \lambda\mu\nu\sqrt{\nu}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{V}_0 - \frac{1}{\mu\sqrt{\nu}}\,[\mathrm{V}'(t) + \lambda\nu\mathrm{V}(t) - \gamma(t)]\right\} + \mu\sqrt{\nu}\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\gamma(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau ,$$

che può scriversi:

$$\mathrm{V}''(t) - (\pi\mu^2 - 2\lambda)\,\nu\mathrm{V}'(t) + \lambda^2\nu^2\,\mathrm{V}(t) = \mathrm{F}(t) , \tag{7}$$

avendo posto:

$$\mathrm{F}(t) = \lambda\nu\gamma(t) + \gamma'(t) - \mu\sqrt{\nu}\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\gamma(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \lambda\mu\nu\sqrt{\nu}\,\mathrm{V}_0\,\frac{1}{\sqrt{t}} . \tag{8}$$

La funzione $\mathrm{V}(t)$ deve dunque soddisfare all'equazione differenziale ordinaria di 2° ordine (7), che si integrerà tenendo conto della condizione iniziale (6), e della seguente, che si desume dalla (5):

$$\mathrm{V}'(0) = \gamma(0) - \lambda\nu\mathrm{V}_0 . \tag{6'}$$

3. L'equazione semplicissima (7), essendo a coefficienti costanti, si può integrare con procedimenti noti. Se si determinano le due costanti a, b in guisa che:

$$(9)\qquad \begin{cases} a+b=(\pi\mu^2-2\lambda)\,\nu \\ ab=\lambda^2\nu^2\,, \end{cases}$$

si potrà dare alla (7) la forma:

$$\left(\frac{d}{dt}-a\right)\left(\frac{d}{dt}-b\right)\mathrm{V}(t)=\mathrm{F}(t),$$

cioè:

$$e^{at}\frac{d}{dt}\left\{e^{-(a-b)t}\frac{d}{dt}\left[e^{-bt}\,\mathrm{V}(t)\right]\right\}=\mathrm{F}(t)\,,$$

da cui, facendo una prima integrazione:

$$(10)\qquad e^{-(a-b)t}\frac{d}{dt}\left[e^{-bt}\,\mathrm{V}(t)\right]=\int_0^t e^{-a\tau}\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau+c_1\,,$$

ove c_1 è una costante arbitraria.

Supponiamo dapprima a diverso da b; con una seconda integrazione si ottiene:

$$e^{-bt}\,\mathrm{V}(t)=\int_0^t e^{(a-b)u}\,du\int_0^u e^{-a\tau}\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau+\frac{c_1}{a-b}\,e^{(a-b)t}+\frac{c_2}{a-b}\,,$$

ove c_2 è un'altra costante arbitraria.

Integrando per parti si può scrivere:

$$(11)\qquad \begin{aligned}\mathrm{V}(t)=\frac{e^{at}}{a-b}\int_0^t e^{-a\tau}\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau-\frac{e^{bt}}{a-b}\int_0^t e^{-b\tau}\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau\,+\\ +\frac{1}{a-b}\left(c_1\,e^{at}+c_2\,e^{bt}\right).\end{aligned}$$

Determiniamo le costanti c_1, c_2. Da quest'equazione, poi dalla (10), il cui 1° membro vale:

$$e^{-at}\,\mathrm{V}'(t)-b e^{-at}\,\mathrm{V}(t)\,,$$

e dalle (6), (6′) si trae, scrivendo γ_0 invece di $\gamma(0)$:

$$(12)\qquad c_1=\gamma_0-(\lambda\nu+b)\,\mathrm{V}_0\quad,\quad c_2=-\gamma_0+(\lambda\nu+a)\,\mathrm{V}_0\,.$$

Sostituendo nella (11) ad F il suo valore (8), facendo delle integrazioni per parti, e ricordando le (12), si ottiene:

$$
\begin{aligned}
V(t) = \frac{e^{at}}{a-b} \Big\{ (\lambda\nu + a) \int_0^t e^{-a\tau} \gamma(\tau)\, d\tau \, - \\
- \mu \sqrt{\nu}\, a \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \int_0^\tau \frac{\gamma(u)\, du}{\sqrt{\tau - u}} + \lambda\mu\nu\sqrt{\nu}\, V_0 \int_0^t \frac{e^{-a\tau} d\tau}{\sqrt{\tau}} \, - \\
- (\lambda\nu + b) V_0 \Big\} - \frac{e^{bt}}{a-b} \Big\{ (\lambda\nu + b) \int_0^t e^{-b\tau} \gamma(\tau)\, d\tau \, - \\
- \mu \sqrt{\nu}\, b \int_0^t e^{-b\tau} d\tau \int_0^\tau \frac{\gamma(u)\, du}{\sqrt{\tau - u}} \, + \\
+ \lambda\mu\nu\sqrt{\nu}\, V_0 \int_0^t \frac{e^{-b\tau} d\tau}{\sqrt{\tau}} - (\lambda\nu + a) V_0 \Big\} .
\end{aligned} \tag{13}
$$

Non è difficile verificare che questa espressione di $V(t)$ soddisfa effettivamente alle (5), (6); però siccome occorrono, per questa verifica, calcoli alquanto lunghi, per quanto semplici, non staremo a riportarli qui; ci limiteremo a fare in seguito la verifica per un caso particolare.

Supponiamo invece $a = b$; dalla (10) si deduce allora con una seconda integrazione:

$$
e^{-at}\, V(t) = \int_0^t du \int_0^u e^{-a\tau}\, F(\tau)\, d\tau + c_1 t + c_2 ,
$$

ovvero, integrando per parti:

$$
V(t) = t\, e^{at} \int_0^t e^{-a\tau}\, F(\tau)\, d\tau - e^{at} \int_0^t \tau\, e^{-a\tau}\, F(\tau)\, d\tau + c_1 t\, e^{at} + c_2\, e^{at}, \tag{11'}
$$

la quale formola, del resto, potrebbe pure dedursi dalla (11) con un passaggio al limite.

Per le costanti c_1, c_2 si trovano i valori:

$$
c_1 = \gamma_0 - (\lambda\nu + a) V_0 \quad , \quad c_2 = V_0 . \tag{12'}
$$

Sostituendo nella (11′) ad F il suo valore (8), e facendo delle integrazioni per parti, si trova:

$$
\begin{aligned}
V(t) = t\, e^{at} \Big\{ (\lambda\nu + a) \int_0^t e^{-a\tau} \gamma(\tau)\, d\tau \, - \\
- \mu \sqrt{\nu}\, a \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \int_0^\tau \frac{\gamma(u)\, du}{\sqrt{\tau - u}} + \lambda\mu\nu\sqrt{\nu}\, V_0 \int_0^t \frac{e^{-a\tau} d\tau}{\sqrt{\tau}} \, - \\
- (\lambda\nu + a) V_0 \Big\} - e^{at} \Big\{ (\lambda\nu + a) \int_0^t \tau\, e^{-a\tau} \gamma(\tau)\, d\tau \, - \\
- \mu \sqrt{\nu}\, a \int_0^t \tau\, e^{-a\tau} d\tau \int_0^\tau \frac{\gamma(u)\, du}{\sqrt{\tau - u}} - \int_0^t e^{-a\tau} \gamma(\tau)\, d\tau \, + \\
+ \mu \sqrt{\nu} \int_0^t e^{-a\tau} d\tau \int_0^\tau \frac{\gamma(u)\, du}{\sqrt{\tau - u}} + \lambda\mu\nu\sqrt{\nu}\, V_0 \int_0^t \frac{\tau\, e^{-a\tau} d\tau}{\sqrt{\tau}} - V_0 \Big\} ,
\end{aligned}
$$

che, col cambiamento di variabile $\tau = t - u$, può scriversi più semplicemente:

$$(13') \qquad \begin{aligned} V(t) &= (\lambda\nu + a) \int_0^t u\, e^{au} \gamma(t-u)\, du - \\ &- \mu\sqrt{\nu}\, a \int_0^t e^{au} u\, du \int_0^{t-u} \frac{\gamma(v)\, dv}{\sqrt{t-u-v}} + \int_0^t e^{au} \gamma(t-u)\, du - \\ &- \mu\sqrt{\nu} \int_0^t e^{au}\, du \int_0^{t-u} \frac{\gamma(v)\, dv}{\sqrt{t-u-v}} + \lambda\mu\nu\sqrt{\nu}\, V_0 \int_0^t \frac{u\, e^{au}\, du}{\sqrt{t-u}} - \\ &- (\lambda\nu + a)\, V_0\, t\, e^{at} + V_0\, e^{at}. \end{aligned}$$

È ora assai facile determinare il cammino z, percorso dal centro della sfera, a partire dalla posizione iniziale $z = 0$. Poichè $\frac{dz}{dt} = V(t)$, con una quadratura, seguita da un'integrazione per parti, si ha dalle (11), (11'):

$$(14) \qquad \begin{aligned} z &= \frac{e^{at}}{a(a-b)} \int_0^t e^{-a\tau} F(\tau)\, d\tau - \frac{e^{bt}}{b(a-b)} \int_0^t e^{-b\tau} F(\tau)\, d\tau + \\ &+ \frac{1}{ab} \int_0^t F(\tau)\, d\tau + \frac{1}{a-b}\left(\frac{c_1}{a} e^{at} + \frac{c_2}{b} e^{bt}\right) + \frac{\gamma_0}{ab} - \frac{\lambda\nu + a + b}{ab} V_0, \end{aligned}$$

$$(14') \qquad \begin{aligned} z &= \frac{at-1}{a^2} e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} F(\tau)\, d\tau - \frac{e^{at}}{a} \int_0^t \tau e^{-a\tau} F(\tau)\, d\tau + \\ &+ \frac{1}{a^2} \int_0^t F(\tau)\, d\tau + \frac{c_1}{a} t\, e^{at} - \frac{c_1 - ac_2}{a^2} e^{at} + \frac{\gamma_0 - (\lambda\nu + 2a)\, V_0}{a^2}. \end{aligned}$$

4. Discutiamo ora i valori delle costanti a, b. Dalle (9) si deduce:

$$a + b + 2\sqrt{ab} = \pi\mu^2\nu,$$

onde:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \mu\sqrt{\pi\nu},$$

quindi: $a + \sqrt{ab} = \mu\sqrt{\pi\nu a}$, cioè:

$$(15) \qquad \lambda\nu + a = \mu\sqrt{\pi\nu a} \quad , \quad \lambda\nu + b = \mu\sqrt{\pi\nu b}.$$

Inoltre, posto:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\pi\mu^2 - 2\lambda)\,\nu \quad , \quad \beta = \frac{1}{2}\mu\nu\sqrt{\pi(\pi\mu^2 - 4\lambda)},$$

si può assumere:

$$a = \alpha + \beta \quad , \quad b = \alpha - \beta.$$

Supponendo ora:

$$(16) \qquad \pi\mu^2 - 4\lambda > 0,$$

cioè, a causa delle (I):

$$5\varrho > 8\eta,$$

i valori delle costanti a, b sono *reali e positivi*.

Se poi:

(16') $$\pi\mu^2 - 4\lambda = 0, \quad \text{onde} \quad 5\varrho = 8\eta$$

si ha:

$$a = b = \frac{4\nu}{R^2}.$$

Supposto invece:

(16'') $$\pi\mu^2 - 4\lambda < 0,$$

le costanti a, b sono immaginarie; inoltre se:

(17) $$\pi\mu^2 - 2\lambda > 0, \quad \text{cioè:} \quad 7\varrho > 4\eta$$

la parte reale delle costanti a, b è *positiva*, mentre tale parte reale è *negativa* se:

(17') $$\pi\mu^2 - 2\lambda < 0, \quad \text{cioè:} \quad 7\varrho < 4\eta.$$

Le condizioni precedenti, inerenti alla realità o non delle costanti a, b sono indipendenti dal coefficiente cinematico di viscosità ν del liquido, ma dipendono soltanto dalla sua densità ϱ, e dalla densità η della sfera che si muove nel liquido.

Se è verificata la (16) si riconosce facilmente che la (11) può scriversi sotto la forma:

$$V(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{senh}(\beta u)}{\beta} F(t-u)\, e^{\alpha u}\, du + \\ + [\gamma_0 - (\lambda\nu + \alpha) V_0] \frac{\operatorname{senh}(\beta t)}{\beta} e^{\alpha t} + V_0 \cosh(\beta t)\, e^{\alpha t},$$

ove $\operatorname{senh}(\beta t)$, $\cosh(\beta t)$ indicano il seno e coseno iperbolico dell'argomento βt.

Se è verificata la (16''), si trova invece l'espressione perfettamente analoga:

$$V(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(\beta' u)}{\beta'} F(t-u)\, e^{\alpha u}\, du + \\ + [\gamma_0 - (\lambda\nu + \alpha) V_0] \frac{\operatorname{sen}(\beta' t)}{\beta'} e^{\alpha t} + V_0 \cos(\beta' t)\, e^{\alpha t}$$

ove:

$$\beta' = \frac{1}{2} \mu\nu \sqrt{\pi(4\lambda - \pi\mu^2)} > 0.$$

Se è soddisfatta la (16') si deduce:

$$V(t) = \int_0^t u\, F(t-u)\, e^{\alpha u}\, du + [\gamma_0 - (\lambda\nu + \alpha) V_0]\, t\, e^{\alpha t} + V_0\, e^{\alpha t},$$