ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Cristallografia. — *Determinazione degli indici principali di rifrazione di un cristallo mediante i piani di polarizzazione* [1]. Nota del Corrispondente C. VIOLA.

Questo metodo è conosciuto e anche impiegato per la determinazione dell'indice di rifrazione nei corpi isotropi, mentre nei cristalli è negletto. Eppure esso può rendere utili servizi oggi che il polarimetro a penombra è reso molto sensibile.

Mi permetto in primo luogo di richiamare alla memoria questo metodo, come è applicato nei corpi isotropi, indi tratterò dei cristalli.

Chiamando con i l'angolo di incidenza di un raggio luminoso monocromatico proveniente da un mezzo isotropo (il vuoto, l'aria ecc.), il quale incida su un piano riflettente di un secondo mezzo isotropo, e con r l'angolo di rifrazione di quel raggio tra il primo e il secondo mezzo, si avrà, come è noto

$$i_* + r_* = 90^\circ,$$

quando i_* è l'angolo di polarizzazione. Con questa relazione è trovato r_* e quindi l'indice di rifrazione n da $n \operatorname{sen} r_* = \operatorname{sen} i_*$. Non è affatto indispensabile ricorrere all'angolo di polarizzazione per avere il suo corrispondente angolo di rifrazione. Si può anzi con più efficacia, e direi con più semplicità ed esattezza, assumere un qualsiasi valore dell'angolo di incidenza i diverso da i_*, tenendo conto del grado di polarizzazione, il rapporto costante di Fresnel, fra la tangente dell'angolo ϱ che il piano di polarizzazione del raggio riflesso fa con il piano di incidenza, e la tangente dell'angolo ε che il corrispondente piano di polarizzazione del raggio incidente fa con lo stesso piano di incidenza, e preso nello stesso senso:

$$-\mathrm{K} = \frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon} = -\frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}. \tag{1}$$

Si assume a piacere l'angolo ε, e si determina con un polarimetro sensibile a penombra l'angolo ϱ. Per avere il grado di polarizzazione, la costante K, per qualsiasi valore di i, si scelgono varie coppie di ϱ e ε, e si fa la media aritmetica dei vari valori di K così ottenuti e affetti di errore. Risolta la (1), dà

$$\operatorname{tag} i \operatorname{tag} r = \frac{1-\mathrm{K}}{1+\mathrm{K}}; \tag{2}$$

da cui risulterà r e quindi l'indice n, $n \operatorname{sen} r = \operatorname{sen} i$.

[1] Lavoro eseguito nel Gabinetto di mineralogia della R. Università di Parma.

Questo modo semplice e direi elegante di determinare l'indice di rifrazione di un corpo isotropo con la sola riflessione, e basato sulla nota relazione (1) di Fresnel, può trovare applicazione nei cristalli a uno o a due assi ottici.

Per dimostrare questo, dovremo ricorrere alle leggi, che reggono il fenomeno della riflessione su piani riflettenti dei cristalli immersi in mezzi isotropi. Queste leggi passano, come è noto, sotto il nome di Mac Cullagh [1]. È necessario che noi le esponiamo, sia pure brevemente, prima di passare alle conseguenze utili al nostro scopo.

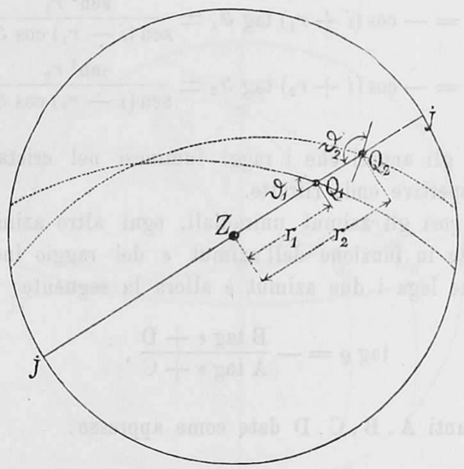

FIG. 1.

Sia ancora i l'angolo di incidenza e di riflessione su un piano riflettente di un cristallo in contatto con un mezzo isotropo rispetto al quale si vuol conoscere gli indici di rifrazione del cristallo. Siano r_1 e r_2 (fig. 1) [2] i due angoli di rifrazione corrispondenti, ai quali si riferiscono due piani di polarizzazione facenti con il piano di incidenza jj i rispettivi angoli ϑ_1 e ϑ_2. Si continui a chiamare con ϱ l'angolo di polarizzazione del raggio riflesso e con ε quello del raggio incidente rispetto allo stesso piano di incidenza e preso nello stesso senso.

[1] F. Neumann, Berliner Akademie, Abhandlg., 1835, pag. 144; Mac Cullagh. *On the Laws of cristalline Reflexion and Refraction,* Dublin, Trans. 18 (1837), pag. 51; A. Cornu, *Recherches sur la Réflexion cristalline*, Ann. Chim. et Phys., Paris, 1867, pag. 283; F. Pockels, *Lehrb. d. Kristalloptik,* 1906, pag. 185.

[2] Nella figura 1, Z è il polo del piano riflettente, Q_1 il polo di un'onda rifratta, Q_2 quello dell'altra ed jj rappresenta il piano di incidenza.

Mac Cullagh ha dimostrato che esistono due speciali valori dell'angolo ε, quali ε_1 e ε_2, corrispondenti a due speciali valori dell'angolo ϱ, quali ϱ_1 e ϱ_2, per cui il secondo raggio rifratto (r_2) o rispettivamente il primo (r_1) è di intensità nulla, e li ha denominati *azimuti uniradiali*. Le espressioni di essi nella elegante forma data da F. Pockels (1), sono le seguenti:

$$
(3)\quad \begin{cases}
\operatorname{tag} \varepsilon_1 = \cos(i - r_1) \operatorname{tag} \vartheta_1 \pm \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_1}{\operatorname{sen}(i + r_1) \cos \vartheta_1} \operatorname{tag} \tau_1 , \\[2ex]
\operatorname{tag} \varepsilon_2 = \cos(i - r_2) \operatorname{tag} \vartheta_2 \pm \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_2}{\operatorname{sen}(i + r_2) \cos \vartheta_2} \operatorname{tag} \tau_2 , \\[2ex]
\operatorname{tag} \varrho_1 = - \cos(i + r_1) \operatorname{tag} \vartheta_1 \pm \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_1}{\operatorname{sen}(i - r_1) \cos \vartheta_1} \operatorname{tag} \tau_1 , \\[2ex]
\operatorname{tag} \varrho_2 = - \cos(i + r_2) \operatorname{tag} \vartheta_2 \pm \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_2}{\operatorname{sen}(i - r_2) \cos \vartheta_2} \operatorname{tag} \tau_2 ;
\end{cases}
$$

essendo τ_1 e τ_2 gli angoli che i raggi luminosi nel cristallo fanno con le normali alle rispettive onde rifratte.

Conosciuti così gli azimut uniradiali, ogni altro azimut ϱ è determinabile facilmente in funzione dell'azimut ε del raggio incidente. La funzione lineare che lega i due azimut è allora la seguente:

$$
(4)\qquad \operatorname{tag} \varrho = - \frac{\mathrm{B} \operatorname{tag} \varepsilon + \mathrm{D}}{\mathrm{A} \operatorname{tag} \varepsilon + \mathrm{C}} ,
$$

essendo le costanti A, B, C, D date come appresso:

$$
(5)\quad \begin{cases}
\mathrm{A} = \mathrm{M} - \mathrm{N} \; ; \; \mathrm{B} = \mathrm{N} \operatorname{tag} \varrho_1 - \mathrm{M} \operatorname{tag} \varrho_2 \; ; \; \mathrm{C} = - \mathrm{M} \operatorname{tag} \varepsilon_1 + \mathrm{N} \operatorname{tag} \varepsilon_2 \; ; \\
\mathrm{D} = \mathrm{M} \operatorname{tag} \varepsilon_1 \operatorname{tag} \varrho_2 - \mathrm{N} \operatorname{tag} \varepsilon_2 \operatorname{tag} \varrho_1 \; ; \\
\mathrm{M} = \dfrac{\operatorname{sen}(i + r_1)}{\operatorname{sen}(i + r_2)} \; ; \; \mathrm{N} = \dfrac{\operatorname{sen}(i - r_1)}{\operatorname{sen}(i - r_2)} \; (2) .
\end{cases}
$$

Incidentalmente sia ricordato che la relazione (4) esprime che l'intersezione dei due piani corrispondenti di polarizzazione, l'uno del raggio incidente, l'altro del raggio riflesso, descrive una superficie conica di secondo grado, la quale contiene ancora i due raggi incidente e riflesso.

Anche fra corpo isotropo e cristallo esiste l'angolo di polarizzazione i_* quando $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_*$ per qualsiasi valore di ε. Ma non avvenendo la polarizzazione del raggio riflesso nel piano di incidenza come nei corpi isotropi, si suol chiamare l'angolo ϱ_* la *deviazione polarizzatrice*.

L'angolo di polarizzazione soddisfa alla condizione che il raggio riflesso è normale a una retta, la quale è l'intersezione di due piani *polari*; e come

(1) F. Pockels, op. cit., pag. 185; A. Cornu, op. cit., pag. 328.

(2) F. Pockels, op. cit., pag. 151; A. Cornu, op. cit., pag. 335.

piano polare si intende, secondo Mac Cullagh, un piano normale al piano di polarizzazione della rispettiva onda rifratta e facente, nel più dei casi, un piccolo angolo con il raggio e la normale all'onda [1].

Si comprende da ciò che non si potrà sempre ricorrere all'angolo di polarizzazione per determinare gli indici di rifrazione del cristallo, poichè vi sono incognite che esso non è in grado di risolvere. Ma vi sono d'altro canto certe posizioni dell'onda rifratta, facili a riconoscersi, che possono dare completamente la chiave del problema. Dovremo quindi ricercare questi artificî, ma converrà considerare a parte i cristalli a un asse ottico e i cristalli a due binormali (assi ottici).

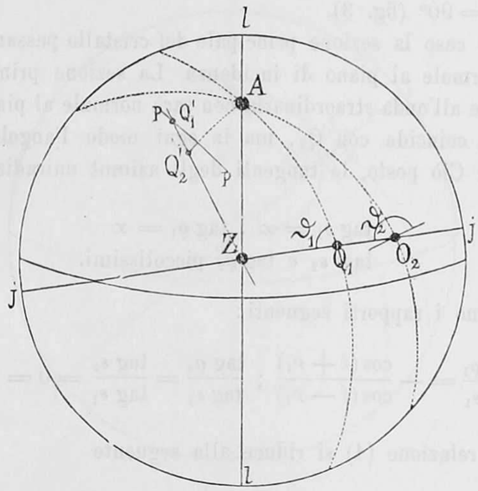

FIG 2.

Cristalli a un asse ottico (fig. 2) [2]. — In questi cristalli essendo uno dei due raggi rifratti sempre ordinario, sarà $\tau_1 = 0$; onde i due azimut uniradiali di Mac Cullagh saranno dati così:

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{tag} \varepsilon_1 = \cos(i - r_1) \operatorname{tag} \vartheta_1 , \\ \operatorname{tag} \varrho_1 = -\cos(i + r_1) \operatorname{tag} \vartheta_1 , \\ \operatorname{tag} \varepsilon_2 = \cos(i - r_2) \operatorname{tag} \vartheta_2 \pm \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_2}{\operatorname{sen}(i + r_2) \cos \vartheta_2} \operatorname{tag} \tau_2 , \\ \operatorname{tag} \varrho_2 = -\cos(i + r_2) \operatorname{tag} \vartheta_2 \pm \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_2}{\operatorname{sen}(i + r_2) \cos \vartheta_2} \operatorname{tag} \tau_2 ; \end{cases}$$

[1] F. Pockels, op. cit., pag. 188 e 189.

[2] Nella figura 2, A è il polo dell'asse ottico, Z il polo del piano riflettente, Q_1 il polo del raggio ordinario e Q_2 il polo dell'onda straordinaria, *jj* è il piano d'incidenza.

dove si assumerà il segno $+$ quando l'indice ordinario o è maggiore dell'indice principale e, e il segno $-$ viceversa.

Le posizioni speciali dell'onde rifratte, che dovremo considerare nei cristalli a un asse ottico, sono date dalle condizioni seguenti:

1) $\vartheta_1 = 90^\circ$;

2) $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 90^\circ$;

3) Le onde rifratte sono normali all'asse ottico;

4) L'angolo di polarizzazione i_* è tale, che il piano polare dell'onda straordinaria passa per il raggio ordinario.

E passiamo ad esaminare uno a uno questi singoli casi speciali.

1) $\vartheta_1 = 90^\circ$ (fig. 3).

In questo caso la sezione principale del cristallo passante per il raggio ordinario è normale al piano di incidenza. La sezione principale che passa per la normale all'onda straordinaria non sarà normale al piano di incidenza, poichè Q_1 non coincide con Q_2, ma in ogni modo l'angolo ϑ_2 sarà molto vicino a 180°. Ciò posto, le tangenti degli azimut uniradiali saranno:

$$\operatorname{tag} \varepsilon_1 = \infty \ , \ \operatorname{tag} \varrho_1 = \infty$$
$$\operatorname{tag} \varepsilon_2 \text{ e } \operatorname{tag} \varrho_2 \text{ piccolissimi.}$$

Inoltre si hanno i rapporti seguenti:

$$\frac{\operatorname{tag} \varrho_1}{\operatorname{tag} \varepsilon_1} = -\frac{\cos(i+r_1)}{\cos(i-r_1)} \ ; \ \frac{\operatorname{tag} \varrho_2}{\operatorname{tag} \varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tag} \varepsilon_2}{\operatorname{tag} \varepsilon_1} = 0 = \frac{A}{\operatorname{tag} \varepsilon_1} \, .$$

Ciò posto, la relazione (4) si riduce alla seguente

$$(4_a) \qquad \operatorname{tag} \varrho = -\frac{N}{M}\frac{\cos(i+r_1)}{\cos(i-r_1)} \operatorname{tag} \varepsilon - \operatorname{tag} \varrho_2 + \frac{N}{M}\frac{\cos(i+r_1)}{\cos(i-r_1)} \operatorname{tag} \varepsilon_2 \, .$$

Siamo liberi di assumere a piacere l'angolo ε e quindi anche molto grande la sua tangente. Non è all'opposto nel nostro arbitrio l'angolo ϱ, il quale è dipendente da i e r. Per esempio, allorquando $i = i_*$ l'angolo ϱ diviene la deviazione polarizzatrice ϱ_* qualunque sia ε. Ma possiamo dare all'angolo di incidenza i un valore distante da i_* sicchè la $\operatorname{tag} \varrho$ sia grande quando lo è $\operatorname{tag} \varepsilon$. Allora di fronte ad esse i membri che contengono $\operatorname{tag} \varrho_2$ e $\operatorname{tag} \varepsilon_2$ nella (4_a) sono piccolissimi e trascurabili. Si raggiungerà perciò una sufficiente approssimazione, scrivendo semplicemente:

$$(7) \qquad \frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon} = -\frac{N}{M}\frac{\cos(i+r_1)}{\cos(i-r_1)} = -K_1 \text{ (costante)};$$

intendendo che questa costante di polarizzazione dovrà essere determinata in base a grandi valori di $\operatorname{tag} \varrho$ e $\operatorname{tag} \varepsilon$ e per corrispondenti valori dell'angolo di incidenza i.

Introducendo quivi per M ed N i loro valori dati dalle (5), avremo:

$$\frac{\operatorname{sen}(i+r_2)}{\operatorname{sen}(i-r_2)}\,\frac{\operatorname{sen}(i-r_1)\cos(i+r_1)}{\operatorname{sen}(i+r_1)\cos(i-r_1)}=\mathrm{K}_1 \tag{7$_a$}$$

ossia

$$\frac{\operatorname{sen}(i+r_2)}{\operatorname{sen}(i-r_2)}=\mathrm{K}_1\,\frac{\operatorname{tag}(i+r_1)}{\operatorname{tag}(i-r_1)}\,. \tag{8}$$

Quivi si trovano due angoli di rifrazione r_2 e r_1.

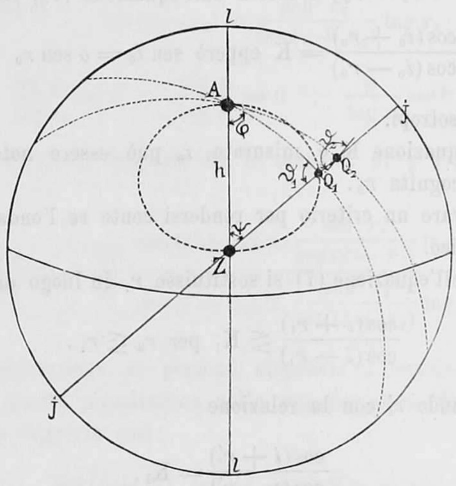

FIG. 3.

Se fosse dato uno di essi, p. es. r_1, sarebbe determinabile facilmente l'altro r_2. L'esattezza di r_2 a parità di condizioni dipende da quella di K_1, cioè dalla costante di polarizzazione, la quale, come si è detto, va determinata per grandi valori di ϱ e ε. Anche qui la costante K_1 potrà risultare come la media aritmetica di più determinazioni affette da errore, da aversi per varie coppie di ϱ e ε.

Interessa sapere dove vengono a trovarsi tutti i raggi ordinarî per i quali $\vartheta_1 = 90^\circ$, ovverosia il rapporto $\operatorname{tag}\varrho : \operatorname{tag}\varepsilon =$ costante.

A tale intento sia di nuovo Z il polo del piano riflettente del cristallo, fig. 3, e sia A il polo dell'asse ottico; jj rappresenti ancora un qualsiasi piano di incidenza, e siano Q_1 e Q_2 i poli delle onde ordinaria e straordinaria. Il cerchio massimo passante per A e Q_1, taglierà ad angolo retto il diametro jj, se vuolsi che $\vartheta_1 = 90^\circ$. Il detto cerchio è infatti il luogo di una sezione principale nella quale è polarizzato il raggio ordinario.

Come si vede nella fig. 3, i due angoli φ e ψ, che individuano la posizione di Q_1 sono legati dalla relazione

$$1 = \cos h \operatorname{tag} \varphi \operatorname{tag} \psi ; \tag{9}$$

e segue da qui che il raggio ordinario dal polo Q_1 fa parte di una superficie conica di secondo grado nella quale sono contenuti l'asse ottico e la normale del piano riflettente. L'intersezione di questo cono con la sfera fondamentale è nella fig. 3 tracciata a tratti in proiezione stereografica.

Quando l'onda rifratta è normale all'asse ottico, i poli Q_1 e Q_2 cadono in A e si ha $r_1 = r_2 = r_0$; e allora dall'equazione (7_a) risulta

$$\frac{\cos(i_0 + r_0)}{\cos(i_0 - r_0)} = \mathrm{K} \text{ epperò } \operatorname{sen} i_0 = o \operatorname{sen} r_0 \tag{10}$$

come pei corpi isotropi.

In questa equazione K è misurato, i_0 può essere noto, e può essere determinata l'incognita r_0.

Si può ricavare un criterio per rendersi conto se l'onda rifratta è normale all'asse ottico.

Infatti, se nell'equazione (7) si sostituisse r_1 in luogo di r_2, si avrebbe

$$\frac{\cos(i + r_1)}{\cos(i - r_1)} \lesseqgtr \mathrm{K}_1 \text{ per } r_2 \lesseqgtr r_1 .$$

Sicchè, determinando r_1' con la relazione

$$\frac{\cos(i + r_1')}{\cos(i - r_1')} = \mathrm{K}_1 , \tag{11}$$

si avrebbe per r_1' un valore che non è eguale a r_1 e precisamente

$$r_1' \lesseqgtr r_1 \quad \text{per} \quad r_2 \lesseqgtr r_1 .$$

Calcolando poi l'indice fittizio n_1' con la relazione

$$n_1' = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r_1'}$$

questo indice sarebbe

$$n_1' \lesseqgtr o \quad \text{per} \quad r_2 \lesseqgtr r_1$$

cioè sempre maggiore o sempre minore dell'indice vero. Epperò il valore di o che si ottiene dalla (11) sarà o un massimo o un minimo secondo che $r_2 \lesseqgtr r_1$, allorchè l'onda rifratta risulta normale all'asse ottico (¹).

(¹) A. Cornu nell'op. cit. considera bensì il rapporto $\frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon}$ nel luogo dell'asse ottico, ma non indica il criterio per riconoscere questo luogo.

2) $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 90°$. In questo caso la sezione principale del cristallo, la quale contiene il raggio ordinario e straordinario, è piano di incidenza; è rappresentato nella fig. 3 dal diametro $lAZl$.

Gli azimut uniradiali sono:

$$\operatorname{tag} \varepsilon_1 = 0 \ , \ \operatorname{tag} \varrho_1 = 0 \ , \ \operatorname{tag} \varepsilon_2 = \infty \ , \ \operatorname{tag} \varrho_2 = \infty \ ;$$

e inoltre risultano i seguenti rapporti:

$$\frac{\operatorname{tag} \varrho_2}{\operatorname{tag} \varepsilon_2} = \frac{-\cos(i + r_2) \pm \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_2}{\operatorname{sen}(i - r_2)} \operatorname{tag} \tau_2}{\cos(i - r_2) \pm \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_2}{\operatorname{sen}(i + r_2)} \operatorname{tag} \tau_2} \ ;$$

$$\frac{\operatorname{tag} \varrho_1}{\operatorname{tag} \varepsilon_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\operatorname{tag} \varepsilon_1}{\operatorname{tag} \varepsilon_2} = 0 \ ; \quad \frac{A}{\operatorname{tag} \varepsilon_2} = 0 \, .$$

In conseguenza di ciò il rapporto fra le tangenti di ϱ e ε è una costante, vale a dire

$$\text{(12)} \qquad \frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon} = -\frac{M}{N} \cdot \frac{\cos(i + r_2) \mp \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_2}{\operatorname{sen}(i - r_2)} \operatorname{tag} \tau_2}{\cos(i - r_2) \pm \dfrac{\operatorname{sen}^2 r_2}{\operatorname{sen}(i + r_2)} \operatorname{tag} \tau_2} \, .$$

Ma in questa espressione si possono eliminare i termini che contengono $\operatorname{tag} \tau_2$, essendo questa piccolissima nella maggior parte dei casi. Possiamo scrivere il detto rapporto così:

$$\frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon} = -\frac{\operatorname{sen}(i + r_2)}{\operatorname{sen}(i - r_2)} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2i - \operatorname{sen} 2r_2 \mp \operatorname{sen}^2 r_2 \operatorname{tag} \tau_2}{\operatorname{sen} 2i + \operatorname{sen} 2r_2 \pm \operatorname{sen}^2 r_2 \operatorname{tag} \tau_2} \, ,$$

dove infatti i termini che contengono $\operatorname{tag} \tau_2$ sono trascurabili per rispetto a $\operatorname{sen} 2i$ e $\operatorname{sen} 2r_2$ ove questi siano scelti sufficientemente grandi. Avremo dunque semplicemente:

$$\text{(13)} \qquad \frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon} = -\frac{M}{N} \frac{\cos(i + r_2)}{\cos(i - r_2)} = -K_2 \, (\text{costante}) \, .$$

Sostituendo poi i valori di M ed N dalla (5) si deduce

$$\text{(13}_a\text{)} \qquad \frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon} = -\frac{\operatorname{tag}(i - r_2)}{\operatorname{tag}(i + r_2)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(i + r_1)}{\operatorname{sen}(i - r_1)} = -K_2$$

ossia

$$\text{(14)} \qquad K_2 \frac{\operatorname{tag}(i + r_2)}{\operatorname{tag}(i - r_2)} = \frac{\operatorname{sen}(i + r_1)}{\operatorname{sen}(i - r_1)}$$

Questa relazione che è in tutto analoga alla (8), contiene due indici di rifrazione r_1 e r_2, e può perciò essere utilizzata per determinare uno di essi quando fosse noto l'altro. Se fosse dato r_1, converrebbe risolvere la detta relazione per via di approssimazione; metodo spedito e anche sufficiente per raggiungere l'esattezza che si desidera.

È facile vedere che tutti i raggi i quali soddisfano alla condizione che $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_2 = 90°$ si trovano sopra un piano, che è la sezione principale del cristallo normale al piano riflettente e data nella fig. 3 dal diametro $lAZl$. Abbiamo così due luoghi dei raggi ordinarî soddisfacenti alla condizione che il rapporto

$$\frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon} = \text{costante},$$

il cono di secondo grado e la sezione principale normale al piano riflettente.

Se anche in questo caso speciale l'onda ordinaria e straordinaria saranno normali all'asse ottico e quindi $r_1 = r_2 = r_0$, ricaveremo dalla (13) di nuovo la nota espressione

$$\frac{\cos(i_0 + r_0)}{\cos(i_0 - r_0)} = \mathrm{K};$$

nella quale r_0 è l'unica incognita, essendo misurabili i_0 e K. Anche procedendo con il raggio ordinario lungo la sezione principale, si cadrà nell'asse ottico, e il criterio per riconoscere ciò sarà analogo a quello che si è veduto per passare nell'asse ottico seguendo col raggio ordinario il cono di secondo grado.

Se infatti si scrivesse la relazione 13 semplicemente così

$$\frac{\cos(i + r'_1)}{\cos(i - r'_1)} = \mathrm{K}_2$$

si otterrebbe per r'_1 un valore differente di r_1 e un indice n' sempre maggiore o minore di o finchè il raggio ordinario non cada nell'asse ottico. Sicchè, quando ciò avvenga, l'indice avrà o un valore massimo o un valore minimo.

3) Il raggio ordinario coincide con l'asse ottico. Questo terzo caso speciale è stato esaurito nei due casi precedenti.

4) L'angolo di incidenza è l'angolo di polarizzazione i_* e la deviazione polarizzatrice ϱ_* è nulla, essendo $\operatorname{tag} \vartheta_1$ diversa di zero. In questo caso l'espressione dell'azimut uniradiale ϱ_1

$$\operatorname{tag} \varrho_1 = -\cos(i_* + r_*) \operatorname{tag} \vartheta_1$$

ci dice che deve essere $i_* + r_* = 90°$, vale a dire che il raggio riflesso è normale al raggio ordinario rifratto, ossia il piano polare pp, fig. 2, dell'onda straordinaria passa per il raggio ordinario. Se vi è un piano di incidenza, che soddisfa a questa condizione, ve ne devono essere due che si trovano simmetricamente disposte rispetto alla sezione principale $lAZl$; ossia questo piano divide per metà l'angolo che fanno i detti due piani di incidenza. È facile dimostrare che questa condizione può verificarsi quando il polo Z del piano riflettente ha una posizione determinata e favorevole rispetto al polo A dell'asse ottico.

Consideriamo infatti l'espressione che dà l'azimut uniradiale ϱ_2 messa sotto la forma

$$2 \cos \vartheta_2 \operatorname{tag} \varrho_2 = [- \operatorname{sen} 2i + \operatorname{sen} 2r_2] \operatorname{sen} \vartheta_2 \pm 2 \operatorname{sen}^2 r_2 \operatorname{tag} \tau_2 .$$

Quivi è da tenersi il segno $+$ per $o > e$ ossia $r_1 > r_2$, e il segno $-$ nel caso opposto.

Supponiamo dapprima che sia $r_1 < r_2$.

Per $\tau_2 = 0$, ossia quando il raggio straordinario è normale all'asse ottico, sarà $\operatorname{tag} \varrho_2 < 0$; per $\vartheta_2 > 90^\circ$ sarà $\operatorname{tag} \varrho_2 > 0$. Dunque $\operatorname{tag} \varrho_2$ passerà dal segno negativo al segno positivo, e quindi anche per zero.

Se poi $r_1 > r_2$, sarà $\operatorname{tag} \varrho_2 > 0$ per $\vartheta_2 = 0$ e < 0 per $\tau_2 = 0$. E anche qui $\operatorname{tag} \varrho_2$ passerà per zero.

Allorchè la normale al piano riflettente farà un piccolo angolo con l'asse ottico, non si potranno avere piani di incidenza, a causa della riflessione totale, in cui l'angolo di polarizzazione avvenga per $\operatorname{tag} \tau_2 = 0$, e allora questo quarto caso speciale sarà escluso.

Oltre di ciò, come si è detto, anche nella sezione principale AZ, come piano di incidenza, l'angolo di polarizzazione i_* avrà luogo con la deviazione nulla; ma questa posizione del piano di incidenza dovrà essere esclusa per la determinazione dell'indice o. Essa divide per metà l'angolo che i due piani di incidenza sopra citati fanno fra di loro.

Procedimento per determinare i due indici principali di rifrazione o *ed* e *nei cristalli a un asse ottico.* — Consideriamo dapprima una posizione generale del piano riflettente per rispetto all'asse ottico del cristallo. Si girerà il piano di incidenza fino a che l'angolo di polarizzazione i_* abbia luogo con deviazione nulla. Vi sono tre posizioni o una sola di questo piano. Nel caso ve ne siano tre, una di esse divide per metà l'angolo che fanno le altre due, e dà la posizione della sezione principale del cristallo normale al piano riflettente e che contiene l'asse ottico. Nelle altre due posizioni del piano di incidenza, l'angolo di polarizzazione soddisferà alla condizione $i_* + r_* = 90^\circ$, e quindi l'indice di rifrazione sarà

$$o = \operatorname{tag} i_* .$$

Fissata la sezione principale, si assumerà in questa, come piano di incidenza, un qualsiasi angolo di incidenza i e per varie coppie di angoli ϱ e ε si determinerà la costante

$$\frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon} = - \mathrm{K}_2 ,$$

con la quale si calcolerà l'angolo r'_2 facendo uso della formola

$$\frac{\cos(i + r'_2)}{\cos(i - r'_2)} = K_2$$

e quindi l'indice di rifrazione fittizio

$$n' = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r'_2} .$$

Questa operazione si ripeterà sopra varî valori dell'indice di rifrazione, e allora il minimo o il massimo valore di tutti gli indici n' che così si otterranno, sarà l'indice o, e così sarà pure data la posizione dell'asse ottico. Nello stesso tempo si avrà un controllo dell'indice o. Se poi non esistono i tre piani di incidenza per i quali l'angolo di polarizzazione abbia luogo con la deviazione ϱ_* nulla, ma solamente uno, allora questo sarà senz'altro la sezione principale AZ, e in questa si determinerà l'indice o con la costante come si è detto or ora.

Trovato uno degli indici di rifrazione principali si passerà alla determinazione del secondo. A quest'uopo si assumerà di nuovo la sezione principale come piano di incidenza, e quivi, per un qualsiasi angolo di incidenza i, si determinerà la costante

$$K_2 = -\frac{\operatorname{tag} \varrho}{\operatorname{tag} \varepsilon}$$

e poscia risolvendo la relazione

$$K_2 \frac{\operatorname{tag}(i + r_1)}{\operatorname{tag}(i - r_2)} = \frac{\operatorname{sen}(i + r_1)}{\operatorname{sen}(i - r_1)}$$

si calcolerà r_2, e da quest'angolo l'indice intermedio n_2 da $n_2 \operatorname{sen} r_2 = \operatorname{sen} i$, essendo noto r_1 da $o \operatorname{sen} r_1 = \operatorname{sen} i$. Conosciuto ora n_2 si otterrà l'indice e dalla equazione dell'ellisse messa sotto la forma

$$\frac{\cos^2(h - r_2)}{o^2} + \frac{\operatorname{sen}^2(h - r_2)}{e^2} = \frac{1}{n_2}$$

poichè $h - r_2$ è l'angolo che la normale all'onda straordinaria fa con l'asse ottico essendo h l'angolo che la normale al piano riflettente fa con l'asse ottico, fig. 3. Si potrà avere e come la media aritmetica di diversi valori, da ottenersi assumendo varî valori dell'angolo di incidenza i.

Da questa esposizione si vede che una sezione del cristallo a un asse ottico è in generale sufficiente per determinare i due indici principali di rifrazione col mezzo dei piani di polarizzazione del raggio incidente e riflesso; ma perchè il problema sia pienamente risolvibile, occorre che il piano riflettente abbia una posizione favorevole. Una posizione di esso è per es. assolutamente insufficiente, quando cioè il piano è normale all'asse ottico. In questo caso infatti i piani di incidenza sono tutti egualmente situati rispetto all'asse ottico, sono le sezioni principali; cosicchè la scelta si restringe a un solo piano di incidenza. Quivi non è possibile un raggio incidente inclinato verso il piano riflettente, al quale corrisponda un raggio rifratto avente la direzione dell'asse ottico. E non è nemmeno possibile un angolo di polarizzazione tale, che il piano polare dell'onda straordinaria passi pel raggio ordinario. Vedremo però che anche questo caso sfavorevole si presta ad una soluzione, ma approssimata.

Una sezione molto favorevole è allorquando essa è parallela all'asse ottico. Nel piano di incidenza normale all'asse ottico, l'angolo di polarizzazione avviene appunto in guisa che il piano polare dell'onda straordinaria passa pel raggio ordinario. Per esso vale $i_* + r_* = 90°$; ed è sufficiente tanto per la diretta determinazione di o, quanto per la determinazione dell'asse ottico. Di più in questo piano di incidenza per un qualsiasi valore di i sono gli angoli di polarizzazione $\vartheta_1 = 90°$ e $\vartheta_2 = 180°$; onde si ha $\text{tag}\,\varepsilon_1 = \infty$, $\text{tag}\,\varrho_1 = \infty$, $\text{tag}\,\varepsilon_2 = 0$, $\text{tag}\,\varrho_2 = 0$ e di più $\text{tag}\,\tau_2 = 0$. Per conseguenza sarà rigorosamente:

$$\frac{\text{tag}\,\varrho}{\text{tag}\,\varepsilon} = -\frac{\text{N}}{\text{M}}\,\frac{\cos(i+r_1)}{\cos(i-r_1)} = \text{K}_1 \ \text{(costante)};$$

e sostituendo i valori di N ed M:

$$\frac{\text{sen}\,(i+r_2)}{\text{sen}\,(i-r_2)} = \text{K}_1\,\frac{\text{tag}\,(i+r_1)}{\text{tag}\,(i-r_1)}\,.$$

Quivi r_1 è noto essendo $o \,\text{sen}\, r_1 = \text{sen}\, i$. L'indice r_2 che da questa equazione si ricaverà, è misurato normalmente all'asse ottico, onde si avrà senz'altro $e \,\text{sen}\, r_2 = \text{sen}\, i$.

In una prossima Nota tratterò dei cristalli a due binormali, e in una terza Nota riporterò alcuni dati sperimentali.