ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

nello spazio per mezzo dell'atomo di carbonio tetraedrico, la prima idea sia dovuta a me, prima che al van't Hoff ed al Le Bel, ed essa aveva allora ch'io l'annunziai tanto di nuovo da essere considerata da un chimico eminente (v. seduta della Società Chimica di Roma del 23 dicembre 1906) come il passaggio del Rubicone fra le speculazioni considerate come lecite e quelle considerate come illecite.

E questo mi preme che sia noto, tanto più quando in uno scritto pubblicato in Italia al solo scopo di diffondere la scienza, è stato dimenticato.

Fisica matematica. — *Sulla teoria maxwelliana delle azioni a distanza.* Nota del Corrispondente CARLO SOMIGLIANA.

Sono note le difficoltà che si oppongono ad una interpretazione meccanica delle espressioni trovate da Maxwell per sostituire con pressioni elastiche le azioni a distanza nei campi di forza elettrica ed elettro-magnetica. Queste difficoltà hanno condotto i fisici a considerare come impossibile una rappresentazione meccanica soddisfacente dei concetti di Maxwell [1], quantunque una tale impossibilità non sia mai stata invero dimostrata; e Maxwell stesso dica esplicitamente (*Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II, § 645, Third Edition) che la sua rappresentazione non può considerarsi come definitiva. Talchè si può forse dire che le difficoltà provennero, almeno in parte, dal fatto che gli interpreti della teoria maxwelliana vollero dare alle formole di Maxwell un significato ed un'importanza maggiori di quanto pensava il loro inventore.

In questa Nota, ritornando sopra una rappresentazione meccanica dei campi di forza, della quale mi sono occupato parecchi anni or sono [2], ne indico una estensione ad un caso non considerato da Maxwell, quello in cui le forze del campo variano col tempo. Dal punto di vista analitico la rappresentazione non è meno generale che nel caso statico. Ma, dal punto di vista fisico, è necessario supporre che le forze, che si vogliono sostituire con pressioni elastiche prodotte, non più da una deformazione, ma da un movimento vibratorio, non siano di natura differente da quelle che effettivamente sono causa di tali vibrazioni in un mezzo elastico. Con tale limitazione, d'ordine fisico, la estensione dei concetti di Maxwell ai campi di forza variabili col tempo parmi perfettamente lecita. E del resto non mancano campi di forza che soddisfacciano effettivamente a queste condizioni; ad esempio il campo elettrico generato da due conduttori fra i quali avviene una scarica oscillatoria, o quello elettro-magnetico generato da conduttori percorsi da correnti alternate, ecc.

(1) V. Righi, *La moderna teoria dei fenomeni fisici*. Bologna, 1907, pag. 2.
(2) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, ser. II, vol. XXIII.

La rappresentazione, che qui propongo per tali campi, è indipendente da qualsiasi ipotesi circa la natura del mezzo, nel quale si trasmettono le pressioni equivalenti alle azioni a distanza. Solo si suppone che esso sia isotropo. E la rappresentazione si conserva valida in generale anche nel caso che a questo mezzo si attribuiscano, come è naturale supporre, le proprietà dell'etere luminoso. Anzi in questo caso i risultati, cui si arriva, possono prestarsi ad una interpretazione del fatto della trasversalità delle vibrazioni, un po' diversa dalla ordinaria, e che non è forse priva di un qualche interesse.

I. Si abbia un sistema di corpi fra i quali si esercitano delle azioni di qualsiasi natura. Indichiamo con S il complesso degli spazi a tre dimensioni occupati da essi e con s le superficie che li limitano. Con σ indichiamo delle superficie chiuse od aperte sulle quali pure ammettiamo che agiscano delle forze. Indichiamo con

$$X dS\,,\; Y dS\,,\; Z dS \tag{1}$$

le componenti della forza che agisce sopra l'elemento di volume dS e con

$$L d\sigma\,,\; M d\sigma\,,\; N d\sigma \tag{2}$$

le componenti della forza che agisce sopra l'elemento superficiale $d\sigma$.

Supporremo che gli spazi S e le superficie σ non si estendano all'infinito.

Noi ammetteremo che le forze (1) (2) possano anche variare col tempo. E non faremo alcuna ipotesi circa la possibilità, o meno, che esse mantengano in equilibrio il sistema dei corpi e delle superficie, su cui agiscono. Solo ammetteremo che nel caso in cui un tale equilibrio non fosse raggiunto, i corpi e le superficie stesse siano vincolati o sostenuti in modo da mantenere inalterate la loro posizione nello spazio e la loro configurazione, anche sotto l'azione di tali forze, o almeno che subiscano variazioni trascurabili.

Immaginiamo poi un mezzo elastico omogeneo, isotropo diffuso in tutto lo spazio infinito in modo generalmente continuo, senza escludere cioè che in esso per speciali deformazioni e per cause speciali si possano produrre delle discontinuità lungo certe superficie finite che complessivamente indicheremo con τ.

Ciò posto noi ci proporremo il seguente problema:

Cercare un movimento vibratorio di mezzo elastico indefinitamente esteso (od una deformazione nel caso in cui le forze X , Y , Z *e* L , M , N *non variano col tempo) che abbia per effetto di produrre sopra ogni elemento* dS *un'azione identica a quella delle forze* X , Y , Z *e sopra ogni elemento di superficie* $d\sigma$ *un'azione identica a quella delle forze* L , M , N; *colla condizione che tale movimento (o deformazione) sia continuo in tutto lo spazio od abbia determinate discontinuità lungo determinate superficie* τ.

È chiaro che la soluzione del problema ora enunciato implica nel modo più generale la soluzione delle diverse questioni studiate da Maxwell relativamente alla rappresentazione mediante pressioni elastiche dei campi di forza elettrica, magnetica, ecc. Perciò noi chiameremo senz'altro *problema di Maxwell* il problema generale ora enunciato.

Sostanzialmente tale problema non differisce da quelli che ordinariamente si considerano nella teoria dell'elasticità. Essi hanno difatti in via generale per scopo di determinare il movimento o la deformazione le cui reazioni elastiche *facciano equilibrio* a date forze agenti. Nel caso nostro invece le reazioni debbano *equivalere* alle forze. Pertanto noi potremo porre subito in equazione il nostro problema sostituendo nelle equazioni ordinarie dell'elasticità alle forze agenti le forze (1) (2) *mutate di segno*. In sostanza non differente è il procedimento seguito da Maxwell; ma egli, non tenendo conto di tutte le equazioni della teoria dell'elasticità, è pervenuto a soluzioni che, come è ben noto, non sono in accordo con tale teoria.

Indicando con a, b le due costanti elastiche del mezzo, e precisamente le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali, le equazioni indefinite del problema da trattare, si possono ritenere le seguenti:

$$(3)\qquad \begin{aligned} (a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial x}+b^2\Delta_2 u-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=X\\ (a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial y}+b^2\Delta^2 v-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=Y\\ (a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial z}+b^2\Delta_2 w-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=Z \end{aligned}$$

ove u, v, w rappresentano come al solito le componenti dello spostamento nel punto (x, y, z) e

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Queste equazioni dovranno essere verificate in tutto lo spazio infinito, quando si ritenga che all'esterno dei campi S le componenti X, Y, Z abbiano valori nulli.

Siano poi X_n, Y_n, Z_n le componenti della pressione elastica che agisce sull'elemento ds quando si suppone soppressa la parte del mezzo nel quale penetra la normale n; e $X_{n'}$, $Y_{n'}$, $Z_{n'}$ le analoghe rispetto alla normale n' opposta ad n. L'elemento si troverà soggetto alla pressione risultante di queste due, e dovremo quindi avere sulle superficie s

$$(4)\qquad X_n+X_{n'}=L\ ,\ \ Y_n+Y_{n'}=M\ ,\ \ Z_n+Z_{n'}=N.$$

Finalmente indichiamo con U, V, W le componenti del vettore che rappresenta le discontinuità, misurate positivamente secondo la direzione ν

della normale all'elemento $d\tau$. Siano u_ν, v_ν, w_ν i valori di u, v, w sulla faccia di normale ν; e $u_{\nu'}$, $v_{\nu'}$, $w_{\nu'}$ loro valori sulla faccia opposta di normale ν'. Sulle superficie τ dovremo avere

$$(5) \qquad u_\nu - u_{\nu'} = \mathrm{U}\ ,\ v_\nu - v_{\nu'} = \mathrm{V}\ ,\ w_\nu - w_{\nu'} = \mathrm{W}.$$

Queste condizioni rappresentano quelle enunciate nel problema da noi formulato. Non può dirsi però che con esse il problema sia analiticamente determinato. Conviene aggiungere qualche condizione circa il modo di comportarsi della deformazione, o del movimento vibratorio, a distanza infinita.

Nel caso statico si può considerare come conforme alla natura del problema che stiamo trattando, il supporre che se esiste una deformazione, la quale abbia per effetto di produrre reazioni equivalenti alle forze (1) (2) nei campi rispettivi, questa deformazione diventi evanescente, quando ci allontaniamo indefinitamente da tali campi. Perciò indicando con ϱ la distanza da un punto fissato ad arbitrio, porremo le condizioni

$$(6) \qquad \lim_{\varrho=\infty} (\varrho^\mu u\ ,\ \varrho^\mu v\ ,\ \varrho^\mu w) = 0$$

ove μ indica un numero non inferiore alla unità.

Nel caso dinamico la quistione è meno semplice, poichè esistono bensì movimenti pei quali è possibile pensare delle condizioni analoghe alle (6), come ad esempio i moti armonici; ma ve ne sono altri in cui quelle condizioni non sono compatibili colla continuità, ad esempio quando si tratta di movimenti che si propagano in regioni inizialmente in riposo, e pei quali all'infinito regna costantemente la quiete, ma si hanno speciali condizioni sulla fronte dell'onda ([1]). Non entrando nella discussione di questi casi, e seguendo Kirchhoff nello studio delle vibrazioni in campi indefiniti, noi supporremo debbano essere in ogni caso soddisfatte le condizioni (6), il che equivale, come si vedrà facilmente, a supporre che le forze agenti e gli altri elementi del moto, siano evanescenti in un' epoca remotissima antecedente all'istante di tempo che si considera.

Stabilite così queste condizioni (3), (4), (5), (6), si può dimostrare che esse caratterizzano *in modo unico* un movimento vibratorio, od una deformazione del mezzo elastico considerato, e noi troveremo effettivamente un tale movimento o deformazione.

II. Questa soluzione del problema enunciato nel paragrafo precedente si può rappresentare nel seguente modo.

Indichiamo con r la distanza da un punto (x', y', z') fissato in un modo qualunque nello spazio (ma esterno ai campi σ, τ) ad un punto (x, y, z)

([1]) Cfr. Love, *Wave-motions with discontinuities at wave-fronts*. Proceedings of the London math. Society (1904, ser. 2, vol. 1).

variabile nei campi S, σ, τ, e costruiamo i potenziali ritardati ordinari, o di 1° ordine,

$$\mathrm{A}_a = \int_s [\mathrm{X}]_a \frac{d\mathrm{S}}{r} + \frac{1}{k}\int_\sigma [\mathrm{L}]_a \frac{d\sigma}{r} - 2b^2 \int_\tau [\mathrm{U}]_a^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\tau$$

(7)
$$\mathrm{B}_a = \int_s [\mathrm{Y}]_a \frac{d\mathrm{S}}{r} + \frac{1}{k}\int_\sigma [\mathrm{M}]_a \frac{d\sigma}{r} - 2b^2 \int_\tau [\mathrm{V}]_a^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\tau$$

$$\mathrm{C}_a = \int_s [\mathrm{Z}]_a \frac{d\mathrm{S}}{r} + \frac{1}{k}\int_\sigma [\mathrm{N}]_a \frac{d\sigma}{r} - 2b^2 \int_\tau [\mathrm{W}]_a^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\tau$$

ove k indica la densità del mezzo vibrante, e le notazioni $[\;]_a , [\;]_a^\star$ hanno il significato, già da me usato nelle Note *Sopra alcune formole della dinamica dei mezzi isotropi* [1], cioè

$$[f]_a = f\left(t - \frac{r}{a}\right), \quad [f]_a^\star = \left[f + \frac{r}{a}\frac{\partial f}{\partial t}\right]_a .$$

Analogamente indichiamo con $\mathrm{A}_b, \mathrm{B}_b, \mathrm{C}_b$ i potenziali analoghi formati colla costante b, cioè

$$\mathrm{A}_b = \int_s [\mathrm{X}]_b \frac{d\mathrm{S}}{r} + \frac{1}{k}\int_\sigma [\mathrm{L}]_b \frac{d\sigma}{r} - 2b^2 \int_\tau [\mathrm{U}]_b^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\tau ,$$

(8)
$$\mathrm{B}_b = \int_s [\mathrm{Y}]_b \frac{d\mathrm{S}}{r} + \frac{1}{k}\int_\sigma [\mathrm{M}]_b \frac{d\sigma}{r} - 2b^2 \int_\tau [\mathrm{V}]_b^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\tau .$$

$$\mathrm{C}_b = \int_s [\mathrm{Z}]_b \frac{d\mathrm{S}}{r} + \frac{1}{k}\int_\sigma [\mathrm{N}]_b \frac{d\sigma}{r} - 2b^2 \int_\tau [\mathrm{W}]_b^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\tau .$$

Questi potenziali sono la somma di potenziali ritardati di spazio, di superficie e di doppio strato e godono quindi delle proprietà note di questi potenziali.

Costruiamo poi i potenziali ritardati di secondo ordine

(9)
$$\overline{\mathrm{A}}_a = \frac{1}{a^2}\int_s \frac{d\mathrm{S}}{r}\int_0^r dr \int_0^r [\mathrm{X}]_a\, dr + \frac{1}{a^2 k}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r}\int_0^r dr \int_0^r [\mathrm{L}]\, dr + \\ + \frac{2b^2}{a^2}\int_\tau d\tau \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\int_0^r r[\mathrm{U}]_a\, dr$$

$$\overline{\mathrm{A}}_b = \frac{1}{b^2}\int_s \frac{d\mathrm{S}}{r}\int_0^r dr \int_0^r [\mathrm{X}]_b\, dr + \frac{1}{b^2 k}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r}\int_0^r dr \int_0^r [\mathrm{L}]_b\, dr + \\ + 2\int_\tau d\tau \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\int_0^r r[\mathrm{U}]_b\, dr$$

[1] Atti della R. Acc. di Torino, 1906, 1907.

ed i potenziali analoghi relativi alle altre due direzioni degli assi B_a, C_a, B_b, C_b.

Questi potenziali ritardati di 1° e 2° ordine hanno fra loro relazioni analoghe a quelle che esistono fra gli ordinari potenziali newtoniani armonici e biarmonici. Difatti essi soddisfanno alle seguenti equazioni a derivate parziali:

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, A_a = 4\pi a^2 X \quad , \quad (D_t^2 - b^2 \Delta_2)\, A_b = 4\pi b^2 X$$

$$a^2 \Delta_2 \overline{A}_a = A_a \quad , \quad b^2 \Delta_2 \overline{A}_b = A_b$$

e quindi

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, \Delta_2 \overline{A}_a = 4\pi X$$

$$(D_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \Delta_2 \overline{A}_b = 4\pi X\ , \text{ ecc.},$$

nelle quali i valori delle X, Y, Z devono ritenersi nulli fuori dei campi S.

Da queste formole e da considerazioni analoghe a quelle svolte nel paragrafo secondo della mia Nota *Sulla propagazione delle onde nei mezzi isotropi* [1] risulta subito che se noi consideriamo il movimento vibratorio rappresentato dalle formole

$$(10)\quad \begin{cases} 4\pi u_1 = -\dfrac{\partial}{\partial x'} \left\{ \dfrac{\partial(\overline{A}_a - \overline{A}_b)}{\partial x'} + \dfrac{\partial(\overline{B}_a - \overline{B}_b)}{\partial y'} + \dfrac{\partial(\overline{C}_a - \overline{C}_b)}{\partial z'} \right\} - \Delta_2 \overline{A}_b \\ 4\pi v_1 = -\dfrac{\partial}{\partial y'} \left\{ \dfrac{\partial(\overline{A}_a - \overline{A}_b)}{\partial x'} + \dfrac{\partial(\overline{B}_a - \overline{B}_b)}{\partial y'} + \dfrac{\partial(\overline{C}_a - \overline{C}_b)}{\partial z'} \right\} - \Delta_2 \overline{B}_b \\ 4\pi w_1 = -\dfrac{\partial}{\partial z'} \left\{ \dfrac{\partial(\overline{A}_a - \overline{A}_b)}{\partial x'} + \dfrac{\partial(\overline{B}_a - \overline{B}_b)}{\partial y'} + \dfrac{\partial(\overline{C}_a - \overline{C}_b)}{\partial z'} \right\} - \Delta_2 \overline{C}_b \end{cases}$$

le equazioni (3) risulteranno identicamente soddisfatte in tutto lo spazio.

Per soddisfare anche alle altre condizioni relative alle superficie, conviene considerare un altro movimento. Costruiamo i potenziali ritardati di 1° ordine di superficie

$$\varphi_1 = \int_\tau \left[U \frac{\partial x}{\partial \nu} + V \frac{\partial y}{\partial \nu} + W \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_a \frac{d\tau}{r},$$

$$\psi_1 = \int_\tau \left[V \frac{\partial z}{\partial \nu} - W \frac{\partial y}{\partial \nu} \right]_b \frac{d\tau}{r} \quad , \quad \psi_2 = \int_\tau \left[W \frac{\partial x}{\partial \nu} - U \frac{\partial z}{\partial \nu} \right]_b \frac{d\tau}{r}$$

$$\psi_3 = \int_\tau \left[U \frac{\partial y}{\partial \nu} - V \frac{\partial x}{\partial \nu} \right]_b \frac{d\tau}{r}.$$

Di questi potenziali il primo φ soddisfa alla equazione

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2)\, \varphi_1 = 0$$

[1] Atti della R. Acc. di Torino, 1905.

e gli altri tre all'altra equazione analoga

$$(D_t^2 - b^2 \Delta_2)\, \psi = 0 .$$

Perciò il movimento vibratorio rappresentato dalle formole

$$(11) \qquad \begin{aligned} 4\pi u_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y'} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z'}, \\ 4\pi v_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z'} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x'}, \\ 4\pi w_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z'} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x'} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y'}, \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$\varphi = -\frac{a^2 - 2b^2}{a^2}\, \varphi_1$$

si decompone in due, l'uno longitudinale e l'altro trasversale, ciascuno dei quali soddisfa alle equazioni (3), quando si suppongano X, Y, Z *nulle in tutto lo spazio*. Segue da ciò che la sovrapposizione del movimento (11) al movimento rappresentato dalle (10) non altera la proprietà di questi integrali di soddisfare le equazioni (3) in tutto lo spazio.

Noi considereremo appunto il movimento vibratorio che risulta da questa sovrapposizione cioè il movimento:

$$(12) \qquad u = u_1 + u_2 \quad , \quad v = v_1 + v_2 \quad , \quad w = w_1 + w_2$$

Si può dimostrare in via generale che esso soddisfa anche alle altre condizioni richieste dalla soluzione del problema di Maxwell.

III. Per questo cominciamo ad osservare che le formole precedenti quando si suppongano X, Y, Z, L, M, N, U, V, W indipendenti dal tempo dànno immediatamente la soluzione del problema statico di Maxwell.

Inoltre se noi supponiamo che negli integrali di superficie che compaiono nei secondi membri delle (10), (11) le funzioni $L\left(t - \frac{r}{a}\right)$, $M\left(t - \frac{r}{a}\right)$, ... $U\left(t - \frac{r}{a}\right)$, ... siano sviluppate secondo le serie di potenze dei rapporti $\frac{r}{a}$, $\frac{r}{b}$, i primi termini di tali sviluppi daranno luogo ad integrali di forma identica a quelli che si hanno nel caso statico, e questi saranno i soli che converrà di considerare, quando si vogliano studiare le discontinuità degli integrali (10) (11) attraverso le superficie σ, τ, in quanto che gli altri, dipendendo da potenze d'ordine superiore della r, non dànno luogo a discontinuità.

Ora le discontinuità di questi integrali nel caso statico sono già state studiate [1] e conducono precisamente a verificare le condizioni (4) (5), pei punti che non sono sul contorno di quelle superficie σ, τ che sono aperte. Io

[1] Vedi ad es. (oltre la mia Nota sopracitata dei Rend. dell'Ist. Lomb.), Lauricella, *Equilibrio dei corpi elastici*, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1894.

ritornerò su questa quistione per determinare in questi casi con precisione la natura delle singolarità sul contorno, ma intanto si può osservare che le condizioni fisiche del problema non vengono sensibilmente alterate se noi immaginiamo prolungate oltre il contorno le superficie σ, τ con striscie sottilissime, sopra le quali si assegnino valori tali alle L, M, ... W. che, senza interrompere la continuità, si riducano a zero sul nuovo contorno. Potremo allora considerare queste superficie aperte, come chiuse, aggiungendo opportuni pezzi di superficie, sulle quali i valori di quelle funzioni siano sempre nulli. I teoremi relativi alle discontinuità per superficie chiuse saranno allora applicabili.

Finalmente per quanto riguarda il modo di comportarsi degli integrali (10) (11) all'infinito, osserviamo che essi si comportano come potenziali ritardati di 1° ordine, e perciò quando si ammetta che in un tempo precedente remotissimo le funzioni X, Y, Z, L, M, N, U, V, W e le loro derivate rispetto al tempo abbiano valori nulli e non presentino discontinuità, con un ragionamento analogo a quello ben noto di Kirchhoff, si può concludere che all'infinito si annullano in modo da soddisfare alle condizioni (6).

Finalmente per dimostrare la unicità della soluzione del problema di Maxwell come fu da noi posto, si può osservare che mediante le formole di Love ([1]) qualsiasi soluzione si può rappresentare con formole integrali formate linearmente colle componenti X, Y, ... W. Da ciò segue che la differenza di di due soluzioni corrispondenti a valori uguali per queste quantità risulta necessariamente nulla.

Segue di qui che se noi supponiano che le U, V, W siano sempre nulle, cioè che non esistano le superficie τ di discontinuità, si può concludere: *Esiste in generale sempre uno ed un solo movimento vibratorio, od una sola deformazione, che risolvano il problema di Maxwell e sono continui in tutto lo spazio. Essi sono completamente determinati dalle forze del campo, e rappresentabili colle formole* (12), *posto* $U = V = W = 0$.

IV. Mediante le formole generali della teoria dell'elasticità che legano le componenti di pressione a quelle di deformazione, noi possiamo studiare la distribuzione nel mezzo delle pressioni prodotte dal movimento vibratorio (12) o dalla corrispondente deformazione nel caso statico. Quelle formole, con notazioni ben conosciute si possono scrivere

$$
\begin{aligned}
X_x &= -k(a^2-b^2)\,\theta - 2kb^2\frac{\partial u}{\partial x}\,, & Y_z &= -kb^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\
Y_y &= -k(a^2-b^2)\,\theta - 2kb^2\frac{\partial v}{\partial y}\,, & Z_x &= -kb^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
Z_z &= -k(a^2-b^2)\,\theta - 2kb^2\frac{\partial w}{\partial z}\,, & X_y &= -kb^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),
\end{aligned} \tag{13}
$$

e quando in esse al posto delle u, v, w si sostituiscano i valori che sono

([1]) Cfr. le Note già citate: *Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi.*

dati dalle (10), (11), (12), si ottengono delle pressioni elastiche, che fanno precisamente l'ufficio delle celebri pressioni di Maxwell rispetto al campo di forze considerato.

Non ci occuperemo per ora delle effettive espressioni di queste pressioni, che possono assumere una forma notevolmente semplice. Faremo invece un'osservazione che ha un notevole interesse pel problema generale del quale ci siamo occupati.

Noi non abbiamo posta alcuna limitazione, nè introdotta alcuna ipotesi, riguardo alle costanti elastiche a, b del mezzo. Le soluzioni trovate valgono quindi qualunque sia la sua natura fisica. Però è interessante vedere come esse si modifichino quando si attribuiscano al mezzo proprietà analoghe a quelle dell'etere luminoso.

Le costanti a, b debbono soddisfare alla condizione

$$a > b$$

Noi possiamo quindi immaginare che a cresca indefinitamente, rimanendo fisso il valore di b. Si vede allora facilmente che le funzioni $\overline{A}_a$, $\overline{B}_a$, $\overline{C}_a$. tendono allo zero; mentre le $\overline{A}_b$, $\overline{B}_b$, $\overline{C}_b$ si conservano inalterate. Così φ si conserva finita e ψ_1, ψ_2, ψ_3 inalterate. Pertanto le formole (10) (11) continuano ad avere un significato, e perciò anche le (12).

Possiamo perciò conchiudere che, in generale, la soluzione trovata pel problema di Maxwoll si conserva valida anche per un mezzo in cui la velocità di propogazione delle conde longitudinali sia infinitamente grande, rispeto a quella delle onde trasversali. Ma per vedere meglio come si comporti un tal mezzo rispetto al fenomeno delle vibrazioni, conviene osservare che la dilatazione, quando a e b sono finite si può esprimere colla formola [1]:

$$(14)\quad \begin{aligned} 4\pi a^2\theta = & \int_s \left([X]_a^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + [Y]_a^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [Z]_a^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS + \\ & + \frac{1}{k} \int_\sigma \left([L]_a^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [M]_a^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [Z]_a^\star \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\sigma \\ & - 2b^2 \int_\tau \left([U]_a^\star \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [V]_a^\star \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [W]_a^\star \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\tau \\ & - \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} \int_\tau \left[\frac{\partial^2 U_\nu}{\partial t^2} \right]_a \frac{d\tau}{r} - \frac{2b^2}{a^2} \int_\tau \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} \right]_a \frac{\partial r}{\partial \nu} \frac{d\tau}{r}, \end{aligned}$$

dove U_ν e U_r rappresentano le componenti delle discontinuità della vibra-

[1] Vedi la Nota 2ª. *Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi.*

zione secondo la normale ν ed il viaggio vettore r. Ora se in questa formola dopo aver diviso per a^2 facciamo crescere a indefinitamente troviamo:

$$\lim_{a=\infty} \theta = 0 ,$$

cioè il mezzo si comporta come incomprensibile. Ciò era prevedibile; ma è interessante notare che si ha anche:

$$\lim_{a=\infty} a^2 \theta = \text{quantità finita.}$$

Perciò *anche le* (13), *cioè le espressioni delle pressioni, conservano un significato.*

Chiamando Ω questa quantità finita limite del prodotto $a^2\theta$, si ha:

$$4\pi\Omega = \int_s \left(X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS +$$

$$+ \frac{1}{k} \int_\sigma \left(L \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + M \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + N \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\sigma -$$

$$- 2b^2 \int_\tau \left(U \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\tau -$$

$$- \int_\tau \frac{\partial^2 U_\nu}{\partial t^2} \frac{d\tau}{r} .$$

Questo limite dipende quindi dai valori delle X, Y, Z,... V, W, nel tempo t.

Considerazioni analoghe si potrebbero fare quando invece del problema di Maxwell si studiasse il problema generale del movimento vibratorio in *mezzo indefinito* come quello ora immaginato. Le formole precedenti varrebbero ancora, quando si mutasse segno alle componenti delle forze di massa e superficiali, e si troverebbe che le equazioni del movimento di questo *mezzo limite*, come possiamo chiamarlo, sarebbero le seguenti:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 u = X + \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 v = Y + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 w = Z + \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

e le componenti di pressione:

$$X_x = - k\Omega - 2kb^2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad Y_z = - kb^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

e così via. In queste equazioni la funzione Ω si presenta come un potenziale di forza, e come una nuova funzione da determinarsi. La trasversalità del movimento si può considerare allora come dovuta all' azione di questo potenziale.

V. Le considerazioni precedenti sono d'indole troppo generale per potere da esse giudicare della opportunità della rappresentazione di un campo di forza mediante pressioni elastiche come quelle proposte. Conviene applicare le formole trovate a casi speciali e cercare a quali risultati esse conducano. Ciò mi propongo di fare. Intanto però mi sembra sia lecito concludere che non vi può esser dubbio circa la possibilità di risolvere in via generale il problema di Maxwell senza uscire dal campo della meccanica ordinaria.

Astronomia. — *Osservazioni del passaggio di Mercurio 1907 novembre 13-14, fatte al R. Osservatorio del Campidoglio.* Nota del Corrispondente A. Di Legge.

Il cielo, quantunque più o meno nuvoloso nel mattino, ci ha permesso di osservare tutti i contatti. Le osservazioni furono fatte da me e dall' astronomo F. Giacomelli per proiezione al refrattore di Merz, di $0^m,117$ di apertura, sull' imagine del disco solare di $0^m,40$. L' astronomo aggiunto A. Prosperi osservò anch' egli per proiezione il terzo e quarto contatto ad un cannocchiale di Dollond, di $0^m,065$ di apertura, montato parallatticamente sull' imagine del disco solare di $0^m,16$.

I tempi dei contatti osservati in tempo medio civile del Campidoglio sono i seguenti:

		Primo contatto	Secondo contatto	Terzo contatto	Quarto contatto
Di Legge	1907 nov. 14	$11^h\,13^m\,26^s$	$11^h\,15^m\,49^s$	$14^h\,37^m\,32^s$	$14^h\,40^m\,6^s$
Giacomelli	» » »	» » 23	» » 36	» » 22	» » 7
Prosperi	» » »	— — —	— — —	» » 26	» » 2

Le imagini dei bordi del sole e del pianeta furono oscillanti ed ondulati in tutti i contatti. Il disco di mercurio apparve circolare ed uniformemente nero senza traccia di aureola. Nel 2° e 3° contatto e più marcatamente nel terzo mi parve di vedere per qualche secondo un legamento in forma di striscia nera tra il bordo solare ed il bordo di mercurio.

I tempi dei quattro contatti calcolati per Roma colle formole del Ber. Astr. Jahrbuch sono:

1° contatto	1907 nov. 14	$11^h\,13^m\,11^s.1$	t. m. civile del Campidoglio
2° contatto	» » »	» 15 52.2	» » » » »
3° contatto	» » »	14 37 55.8	» » » » »
4° contatto	» » »	» 40 35.9	» » » » »