ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

Matematica. — *Integrazione dell'equazione funzionale che regge la caduta di una sfera in un liquido viscoso.* Nota II di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrispondente LEVI-CIVITA.

5. Prima di proseguire nella trattazione del caso generale, soffermiamoci sopra un caso particolare, molto importante, cioè quello trattato dal Basset e dal Picciati.

Supponiamo che il liquido, inizialmente, sia in quiete, e che la velocità iniziale V_0 della sfera sia pure nulla; questa allora si muoverà entro il liquido, unicamente sotto l'azione della gravità.

In tal caso la funzione $\gamma(t)$ si riduce ad una costante γ_0, che ha per valore:

$$\gamma_0 = \frac{2(\eta - \varrho)\, g}{2\eta + \varrho},$$

ove g indica l'accelerazione della gravità.

Dalla (13) avremo quindi:

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{e^{at}}{a-b} \left\{ (\lambda\nu + a)\, \gamma_0 \frac{e^{-at} - 1}{-a} - 2\mu\sqrt{\nu}\, a\gamma_0 \int_0^t e^{-a\tau} \sqrt{\tau}\, d\tau \right\} - \\ - \frac{e^{bt}}{a-b} \left\{ (\lambda\nu + b)\, \gamma_0 \frac{e^{-bt} - 1}{-b} - 2\mu\sqrt{\nu}\, b\gamma_0 \int_0^t e^{-b\tau} \sqrt{\tau}\, d\tau \right\}, \end{aligned}$$

ovvero, integrando per parti:

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{\gamma_0}{a-b} \left(\frac{\lambda\nu + b}{b} - \frac{\lambda\nu + a}{a} \right) + \frac{e^{at}}{a-b} \gamma_0 \left\{ \frac{\lambda\nu + a}{a} - \mu\sqrt{\nu} \int_0^t \frac{e^{-a\tau}}{\sqrt{\tau}}\, d\tau \right\} - \\ - \frac{e^{bt}}{a-b} \gamma_0 \left\{ \frac{\lambda\nu + b}{b} - \mu\sqrt{\nu} \int_0^t \frac{e^{-b\tau}}{\sqrt{\tau}}\, d\tau \right\}, \end{aligned}$$

cioè, ricordando le (15):

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} + \frac{e^{at}}{a-b} \gamma_0 \mu\sqrt{\nu} \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \int_0^t \frac{e^{-a\tau}}{\sqrt{\tau}}\, d\tau \right) - \\ - \frac{e^{bt}}{a-b} \gamma_0 \mu\sqrt{\nu} \left(\sqrt{\frac{\pi}{b}} - \int_0^t \frac{e^{-b\tau}}{\sqrt{\tau}}\, d\tau \right). \end{aligned} \tag{18}$$

Verifichiamo che questa funzione soddisfa effettivamente all'equazione funzionale (5).

Osserviamo intanto che si può pure scrivere:

$$V(t)=\frac{\gamma_0}{\lambda\nu}+\frac{e^{at}}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\frac{\pi\nu}{a}}-\frac{e^{bt}}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\frac{\pi\nu}{b}}-$$

$$-\frac{1}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\int_0^t\frac{e^{au}}{\sqrt{t-u}}\,du+\frac{1}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\int_0^t\frac{e^{bu}}{\sqrt{t-u}}\,du\,.$$

Sostituendo nella (5) ed effettuando alcune riduzioni mediante le (15), si ha:

$$(\lambda\nu+a)\,e^{at}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-(\lambda\nu+b)\,e^{bt}\sqrt{\frac{\pi}{b}}=$$

$$=\mu\sqrt{\nu}\left\{a\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\tau\frac{e^{au}}{\sqrt{\tau-u}}\,du-b\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\tau\frac{e^{bu}}{\sqrt{\tau-u}}\,du\right\},$$

invertendo le integrazioni per mezzo del teorema di Dirichlet, il 2° membro può scriversi:

$$\mu\sqrt{\nu}\left\{a\int_0^t e^{au}\,du\int_u^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}\sqrt{\tau-u}}-b\int_0^t e^{bu}\,du\int_u^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}\sqrt{\tau-u}}\right\}=$$

$$=\mu\sqrt{\nu}\,\pi\left\{a\int_0^t e^{au}\,du-b\int_0^t e^{bu}\,du\right\}=\mu\sqrt{\nu}\,\pi(e^{at}-e^{bt}),$$

che si riconosce essere identico al 1° membro, a cagione delle (15).

Perciò la funzione $V(t)$, definita dalla (18), verifica la (5), inoltre si annulla per $t=0$, quindi soddisfa a tutte le condizione poste.

Dalla (18) si deduce poi, dopo alcune riduzioni, che la lunghezza del cammino percorso dal centro dalla sfera vale:

$$\begin{aligned}z&=\frac{\pi\mu^2-\lambda}{\lambda^3\nu^2}\gamma_0+\frac{\gamma_0}{\lambda\nu}t-2\frac{\mu\sqrt{\nu}}{\lambda^2\nu^2}\gamma_0\sqrt{t}+\\&+\frac{e^{at}}{a(a-b)}\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\int_0^t\frac{e^{-a\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\right)-\\&-\frac{e^{bt}}{b(a-b)}\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\left(\sqrt{\frac{\pi}{b}}-\int_0^t\frac{e^{-b\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\right).\end{aligned}\tag{19}$$

6. Supposto verificata la condizione (16), cioè $\eta<\frac{5}{8}\varrho$, le costanti a, b sono positive, e allora ponendo $a\tau=u^2$, la (18) può scriversi:

$$V(t)=\frac{\gamma_0}{\lambda\nu}+\frac{e^{at}}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\frac{\pi\nu}{a}}\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{at}}e^{-u^2}\,du\right)-$$

$$-\frac{e^{bt}}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\frac{\pi\nu}{b}}\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{bt}}e^{-u^2}\,du\right);$$

introducendo col Bertrand, la funzione $\Theta(x)$ definita da:

$$\Theta(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du,$$

potremo scrivere:

$$V(t)=\frac{\gamma_0}{\lambda\nu}+\frac{e^{at}}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\frac{\pi\nu}{a}}\left[1-\Theta(\sqrt{at})\right]-$$

$$-\frac{e^{bt}}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\frac{\pi\nu}{b}}\left[1-\Theta(\sqrt{bt})\right].$$

Questa formola è utilissima per il calcolo numerico della velocità corrispondente ai vari valori di t: infatti gli esponenziali e^{at}, e^{bt} sono calcolati in apposite tavole (¹), e la funzione $\Theta(x)$, che si incontra nel calcolo delle probabilità, nella teoria delle assicurazioni, e nella teoria della rifrazione astronomica, trovasi calcolata presso vari Autori, ad es. nel *Calcul des probabilités* (Paris, a. 1889) del Bertrand (in fine del volume), per valori dell'argomento crescenti di un centesimo a partire da 0 a 4,80; tale funzione, al crescere dell'argomento, tende rapidamente ad 1, ad es. $\Theta(4{,}80)$ differisce, per difetto, da 1 per meno di 10^{-11}.

Il calcolo numerico di z è pure semplicissimo, perchè la (19) può pure scriversi:

$$z=\frac{\pi\mu^2-\lambda}{\lambda^3\nu^2}\gamma_0+\frac{\gamma_0}{\lambda\nu}t\,2\,\frac{\mu\sqrt{\nu}}{\lambda^2\nu^2}\gamma_0\sqrt{t}+$$

$$+\frac{e^{at}}{a(a-b)}\gamma_0\,\mu\sqrt{\frac{\pi\nu}{a}}\left[1-\Theta(\sqrt{at})\right]-\frac{e^{bt}}{b(a-b)}\gamma_0\,\mu\sqrt{\frac{\pi\nu}{b}}\left[1-\Theta(\sqrt{bt})\right].$$

Supponiamo ora soddisfatta la (16″) e quindi $\eta>\frac{5}{8}\varrho$; le costanti a,b risultano allora immaginarie coniugate, e dalla (18) si deduce poscia:

$$V(t)=\frac{\gamma_0}{\lambda\nu}+\frac{e^{\alpha t}}{a-b}\gamma_0\,\frac{\mu\sqrt{\pi\nu}}{\lambda\nu}\left(\sqrt{b}\,e^{i\beta' t}-\sqrt{a}\,e^{-i\beta' t}\right)-$$

$$-\frac{e^{\alpha t}}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\left(e^{i\beta' t}\int_0^t\frac{e^{-\alpha\tau}\,e^{-i\beta'\tau}}{\sqrt{\tau}}d\tau-e^{-i\beta' t}\int_0^t\frac{e^{-\alpha\tau}\,e^{i\beta'\tau}}{\sqrt{\tau}}d\tau\right),$$

osservando poi che:

$$\sqrt{a}=\frac{1}{2}\mu\sqrt{\pi\nu}+i\frac{\beta'}{\mu\sqrt{\pi\nu}},\quad \sqrt{b}=\frac{1}{2}\mu\sqrt{\pi\nu}-i\frac{\beta'}{\mu\sqrt{\pi\nu}};$$

(¹) Cfr. ad es. Köhler, *Manuale logaritmico-trigonometrico*, pp. 356-359.

e facendo il cambiamento di variabile $\beta'\tau = u^2$ si ottiene:

$$V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} - e^{\alpha t}\frac{\gamma_0}{\lambda\nu}\left[\cos(\beta' t) - \frac{\pi\mu^2\nu}{2\beta'}\,\mathrm{sen}(\beta' t)\right] -$$

$$- e^{\alpha t}\frac{2\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}}{\beta'\sqrt{\beta'}}\left[\mathrm{sen}(\beta' t)\int_0^{\sqrt{\beta' t}} e^{-\frac{\alpha}{\beta'}u^2}\cos(u^2)\,du - \right.$$

$$\left. - \cos(\beta' t)\int_0^{\sqrt{\beta' t}} e^{-\frac{\alpha}{\beta'}u^2}\,\mathrm{sen}(u^2)\,du\right],$$

ovvero:

$$V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} - e^{\alpha t}\cos(\beta' t)\,\gamma_0\left[\frac{1}{\lambda\nu} - \frac{2\mu\sqrt{\nu}}{\beta'\sqrt{\beta'}}\int_0^{\sqrt{\beta' t}} e^{-\frac{\alpha}{\beta'}u^2}\,\mathrm{sen}(u^2)\,du\right] +$$

$$+ e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta' t)\,\gamma_0\left[\frac{\pi\mu^2}{2\beta'\lambda} - \frac{2\mu\sqrt{\nu}}{\beta'\sqrt{\beta'}}\int_0^{\sqrt{\beta' t}} e^{-\frac{\alpha}{\beta'}u^2}\cos(u^2)\,du\right].$$

Se, in particolare, $\alpha = 0$, cioè, come si deduce dalla (17), $\pi\mu^2 = 2\lambda$, ovvero $\eta = \frac{7}{4}\varrho$, le formole precedenti si semplificano, osservando che in tal caso $\beta' = \frac{1}{2}\pi\mu^2\nu = \lambda\nu$, e allora si trova:

$$V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} - \frac{\cos(\lambda\nu t)}{\lambda\nu}\gamma_0\left[1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{\lambda\nu t}}\mathrm{sen}(u^2)\,du\right] +$$

$$+ \frac{\mathrm{sen}\,(\lambda\nu t)}{\lambda\nu}\gamma_0\left[1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{\lambda\nu t}}\cos(u^2)\,du\right]$$

Questa formola è assai utile per il calcolo numerico di $V(t)$, perchè gli integrali che qui figurano, che sono stati già incontrati da Eulero nella teoria della curva elastica, e poi da Fresnel nella teoria della diffrazione della luce, si trovano calcolati in apposite tavole, costruite da Fresnel stesso.

7. Dalle formole ora trovate si può subito dedurre il valor limite della velocità $V(t)$, dopo un tempo infinitamente grande.

Infatti dalla (18) si deduce intanto, con un cambiamento di variabile:

$$V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} + \frac{e^{at}}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} - 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-au^2}\,du\right) - \tag{20}$$

$$- \frac{e^{bt}}{a-b}\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\left(\sqrt{\frac{\pi}{b}} - 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-bu^2}\,du\right),$$

ora se le costanti a, b sono reali (e allora saranno necessariamente positive, come abbiamo visto), ovvero se sono immaginarie, ma con parte reale positiva o nulla, sussiste la formola d' Eulero:

(21) $$\int_0^\infty e^{-au^2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,$$

quindi avremo ancora:

$$V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} + 2\,\frac{e^{at}}{a-b}\,\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\int_{\sqrt{t}}^\infty e^{-au^2}\,du - 2\,\frac{e^{bt}}{a-b}\,\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\int_{\sqrt{t}}^\infty e^{-bu^2}\,du\,,$$

Dal teorema di De-l' Hospital si ha poi:

$$\lim_{t=\infty} e^{at}\int_{\sqrt{t}}^\infty e^{-au^2}\,du = \lim_{t=\infty}\frac{\int_{\sqrt{t}}^\infty e^{-au^2}\,du}{e^{-at}} = \lim_{t=\infty}\frac{e^{-at}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}}{e^{-at}} = 0\,,$$

ed un'eguaglianza analoga, in cui al posto di a comparisce b.

Ne segue:

$$\lim_{t=\infty} V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu}\,.$$

Del resto, a questo risultato si giunge pure osservando che la precedente espressione di $V(t)$ si può pure scrivere così:

$$V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} + \frac{1}{a-b}\,\gamma_0\,\mu\sqrt{\nu}\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{\sqrt{t+x}}\,dx\,.$$

Si conclude dunque che il moto della sfera tende a diventare uniforme, il valore limite della velocità essendo:

$$V = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} = \frac{2R^2}{9\nu\varrho}(\eta - \varrho)\,g\,.$$

Questa è la nota formola data da Stokes, nel caso del moto stazionario.

Se poi la parte reale delle costanti a, b è negativa (cioè $\alpha < 0$), dalla (20) stessa risulta, con analoghe considerazioni, che per $t = \infty$ il valore limite della velocità è ancora il 1° termine $\frac{\gamma_0}{\lambda\nu}$.

8. Se infine si suppone verificata la (16′) e quindi $a = b$, si può dedurre dalla (13′):

$$V(t) = \frac{\lambda\nu}{a^2}\,\gamma_0 - \frac{\mu\sqrt{\nu}}{a}\,\gamma_0\sqrt{t} + te^{at}\gamma_0\left\{\frac{\lambda\nu + a}{a} - \mu\sqrt{\nu}\int_0^t \frac{e^{-a\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\right\} -$$

$$- e^{at}\gamma_0\left\{\frac{\lambda\nu}{a^2} - \frac{\mu\sqrt{\nu}}{2a}\int_0^t \frac{e^{-a\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\right\}\,,$$

e poichè, nel caso attuale, si ha: $a = \lambda\nu$, si ottiene, dopo qualche trasformazione:

$$V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} - \frac{\mu\sqrt{\nu}}{\lambda\nu}\gamma_0\sqrt{t} + e^{\lambda\nu t}\gamma_0\mu\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(t - \frac{1}{2\lambda\nu}\right)\left[1 - \Theta(\sqrt{\lambda\nu t})\right],$$

$$V(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu} - \frac{\mu\sqrt{\nu}}{\lambda\nu}\gamma_0\sqrt{t} + 2e^{\lambda\nu t}\gamma_0\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\left(t - \frac{1}{2\lambda\nu}\right)\int_{\sqrt{\lambda\nu t}}^{\infty} e^{-u^2}\,du\,.$$

La penultima di queste formole è assai adatta al calcolo numerico di $V(t)$. L'ultima è invece utile per dedurre il valore limite di $V(t)$ per $t = \infty$, valore che si trova essere eguale a $\frac{\gamma_0}{\lambda\nu}$, come nei casi precedenti.

Il calcolo di z in questi vari casi, si può pure effettuare facilmente, ma, per brevità, mi dispenso di riportare le relative formole.

9. Riprendiamo il caso generale, nel quale la velocità di caduta della sfera è espressa dalla (13).

La funzione $\gamma(t)$ è della forma:

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \varphi(t),$$

ove γ_0 è la costante considerata precedentemente, e $\varphi(t)$ è una funzione che dipende dallo stato iniziale di moto del liquido e della sfera (e che è nulla se sfera e liquido sono, inizialmente, in quiete); tale funzione deve inoltre annullarsi per $t = \infty$.

Sostituendo nella (13) si ottiene:

$$\begin{aligned} V(t) = v(t) + \frac{e^{at}}{a-b}\Big\{ & (\lambda\nu + a)\int_0^t e^{-a\tau}\varphi(\tau)\,d\tau - \\ & - \mu\sqrt{\nu}\,a\int_0^t e^{-au}\,du\int_0^u \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{u-\tau}}\,d\tau + \\ & + \mu\sqrt{\nu}\,\lambda\nu V_0\int_0^t \frac{e^{-a\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau - (\lambda\nu + b)\,V_0\Big\} - \frac{e^{bt}}{a-b}\Big\{\cdots\Big\}, \end{aligned}$$

$v(t)$ designando la velocità dovuta al termine γ_0, cioè quella che compete al caso in cui sfera e liquido sono inizialmente in quiete, la cui espressione è data dal 2° membro della (18).

Si può ancora scrivere, invertendo le integrazioni col teorema di Dirichlet, e tenendo sempre conto delle (15):

$$\begin{aligned} V(t) = v(t) + \frac{e^{at}}{a-b}\mu\sqrt{\pi\nu a}\Big\{ & \int_0^t e^{-a\tau}\varphi(\tau)\,d\tau - \\ & - \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\int_\tau^t \frac{e^{-au}}{\sqrt{u-\tau}}\,du - \\ & - \sqrt{\frac{b}{a}}V_0\left(1 - \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-a\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\right)\Big\} - \frac{e^{bt}}{a-b}\mu\sqrt{\pi\nu b}\Big\{\cdots\Big\}, \end{aligned}$$

con un cambiamento di variabili, si deduce:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(t) = v(t) + \frac{e^{at}}{a-b}\,\mu\sqrt{\pi\nu a}\,\Big\{ \int_0^t e^{-a\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau\, - \\
- 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t e^{-a\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau \int_0^{\sqrt{t-\tau}} e^{-ax^2}\,dx\, - \\
- \sqrt{\frac{b}{a}}\,\mathrm{V}_0\left(1 - 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-ax^2}\,dx\right)\Big\} - \frac{e^{bt}}{a-b}\,\mu\sqrt{\pi\nu b}\,\Big\{\cdots\Big\}.
\end{aligned}
$$

Supponendo le costanti a, b positive, o (se sono immaginarie) con parte reale non negativa, e ricordando la formola d'Eulero (21), si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(t) = v(t) + \\
+ 2\,\frac{e^{at}}{a-b}\,\mu\sqrt{\nu a}\,\Big\{\sqrt{a}\int_0^t e^{-a\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau \int_{\sqrt{t-\tau}}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx - \sqrt{b}\,\mathrm{V}_0 \int_{\sqrt{t}}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx\Big\} - \\
- 2\,\frac{e^{bt}}{a-b}\,\mu\sqrt{\nu b}\,\Big\{\sqrt{b}\int_0^t e^{-b\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau \int_{\sqrt{t-\tau}}^{\infty} e^{-bx^2}\,dx - \sqrt{a}\,\mathrm{V}_0 \int_{\sqrt{t}}^{\infty} e^{-bx^2}\,dx\Big\}.
\end{aligned}
$$

Questa formola, abbastanza semplice, ci dà la velocità $\mathrm{V}(t)$ della sfera al tempo t.

Da essa si trae, con facilità, il valore limite della velocità, al crescere indefinito di t; infatti, dal teorema di De-l'Hospital, si ha:

$$
\lim_{t=\infty}\left[e^{at}\,a\int_0^t e^{-a\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau \int_{\sqrt{t-\tau}}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx - e^{bt}\,b\int_0^t e^{-b\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau \int_{\sqrt{t-\tau}}^{\infty} e^{-bx^2}\,dx \right] =
$$

$$
= \lim_{t=\infty}\left[a\,\frac{\int_0^t e^{-a\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau \int_{\sqrt{t-\tau}}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx}{e^{-at}} - b\,\frac{\int_0^t e^{-b\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau \int_{\sqrt{t-\tau}}^{\infty} e^{-bx^2}\,dx}{e^{-bt}} \right] =
$$

$$
= \lim_{t=\infty} \frac{e^{-at}\,\varphi(t)\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-a\tau}\,\varphi(\tau)\,e^{-(at-a\tau)}\,\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau}{-\,e^{-at}}
$$

$$
- \lim_{t=\infty} \frac{e^{-bt}\,\varphi(t)\int_0^{\infty} e^{-bx^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-b\tau}\,\varphi(\tau)\,e^{-(bt-b\tau)}\,\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau}{-\,e^{-bt}}
$$

$$
= \lim_{t=\infty}\left[\varphi(t)\left(\int_0^{\infty} e^{-bx^2}\,dx - \int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx\right)\right] = 0,
$$

perchè la funzione $\varphi(t)$ è nulla per $t = \infty$.

Ne segue:

$$\lim_{t=\infty} V(t) = \lim_{t=\infty} v(t) = \frac{\gamma_0}{\lambda\nu}.$$

Si arriva allo stesso risultato se la parte reale delle costanti a, b è negativa.

Concludiamo così, anche nel caso generale in cui sfera e liquido inizialmente sono in movimento, che dopo un tempo infinitamente grande, il moto della sfera tende a diventare uniforme, la velocità avendo per valore limite quello assegnato da Stokes, corrispondentemente al moto stazionario della sfera.

Tale risultato è in pieno accordo con ciò che suggerisce l'intuizione fisica.

Meccanica. — *Un teorema sulle equazioni dell'elasticità.* Nota di O. Tedone, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia — *Notizia cristallografica sull'azzurrite del Timpone Rosso presso Lagonegro.* Nota di Ferruccio Zambonini, presentata dal Corrispondente G. De Lorenzo.

Recentemente il prof. G. De Lorenzo ha descritto un interessante giacimento di minerali di rame rinvenuto in certe rocce silicee certamente appartenenti agli strati triassici del Timpone Rosso, presso Lagonegro, in Basilicata (1).

Dei diversi minerali notati dal prof. De Lorenzo uno, e cioè l'azzurrite, si presenta, oltre che in venuzze ed in granuletti, anche qualche volta in piccoli cristallini, nei quali lo stesso prof. De Lorenzo riconobbe le forme $\{110\}$ e $\{101\}$.

Non essendo finora stati descritti che pochissimi giacimenti italiani di azzurrite cristallizzata, sembrò al prof. De Lorenzo che una determinazione cristallografica dei cristalli da lui rinvenuti avrebbe costituito un interessante complemento delle sue ricerche. Con grande cortesia, della quale gli sono ben grato, il prof. De Lorenzo volle affidare a me per lo studio i cristallini da lui isolati. Nelle righe che seguono esporrò brevemente i risultati delle misure eseguite.

(1) In un'ulteriore visita fatta in questo autunno alla località, mi sono convinto che i minerali cupriferi provengono senza dubbio dai terreni triasici. G. De Lorenzo.