

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIV.

1907

---

SERIE QUINTA

---

RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XVI.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1907

che sarebbe analogo a quello dei prodotti di condensazione fra indoli ed aldeidi preparati da Emilio Fischer.

Questa sostanza, che si forma in piccola quantità, per azione dell'acido nitroso, assieme con una resina dà un composto che possiede i caratteri del nitrosometilindolo.

Proseguiremo lo studio di queste reazioni.

**Meccanica.** — *Un teorema sulle equazioni dell'elasticità.* Nota di O. TEDONE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Allo scopo di dare alla nostra esposizione maggiore semplicità e simmetria, abbandoneremo le abituali notazioni ed indicheremo, intanto, con  $x_1, x_2, x_3$  le coordinate cartesiane di un punto e con  $u_1, u_2, u_3$  le componenti dello spostamento. Il teorema che ci proponiamo di stabilire, ponendo:

$$(1) \quad Df = \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{i,j} = a_{j,i} \quad ; \quad \theta = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

ed indicando con  $a_{i,j}, \alpha_{i,j}$  certe costanti, risponde alla seguente domanda: *Sotto quali condizioni le equazioni dell'equilibrio elastico possono porsi sotto la forma:*

$$(2) \quad Du_i + \sum_j \beta_{i,j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

le  $\beta$  essendo altre costanti?

Quando ciò accada  $\theta$  soddisfa all'equazione del second'ordine

$$(3) \quad D\theta + \sum_{h,k} A_{h,k} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_h \partial x_k} = 0, \quad A_{h,k} = \sum_i \alpha_{i,h} \beta_{i,k}$$

mentre le  $u_i$ , come nel caso dell'isotropia, soddisfano ad una stessa equazione del quart'ordine

$$(4) \quad D \left( Du_i + \sum_{h,k} A_{h,k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_k} \right) = 0,$$

diversamente da ciò che accade nel caso generale in cui le  $u_i$  soddisfano ad una stessa equazione del sesto ordine.

2. Affinchè le equazioni (2) possano essere interpretate come equazioni di equilibrio elastico è necessario, intanto, che esse possano ottenersi annullando la variazione prima di un integrale triplo esteso ad una funzione omogenea, di secondo grado, a coefficienti costanti, delle derivate prime delle  $u_i$  rispetto alle  $x_j$ , ossia, secondo la denominazione introdotta dal Somigliana, è necessario che le (2) formino un sistema simmetrico. Si trova

subito che ciò accade solo quando, per ogni sistema di valori di  $i$  e  $j$ , è  $\beta_{i,j} = m\alpha_{i,j}$ ,  $m$  essendo una nuova costante che può, senza inconvenienti, anche suppersi eguale ad uno. Supposto queste condizioni soddisfatte, le equazioni (2) diventano:

$$(2') \quad Du_i + \sum_j \alpha_{i,j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

e provengono dall'annullare la variazione prima di un integrale triplo esteso alla funzione

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \sum_{k,i,j} a_{i,j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \theta^2 = \\ &= \sum_{k,i,j} a_{i,j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

3. La  $f$  non è però la funzione più generale che goda delle proprietà richieste. Se alla superficie di una certa regione  $S$  dello spazio, arbitraria, sono assegnati valori fissi per  $u_1, u_2, u_3$ , vi sono infinite funzioni  $\varphi$  della natura di  $f$ , tali che la variazione prima dell'integrale

$$\int_S \varphi dS$$

sia identicamente nulla e la espressione più generale di questa funzione è

$$(6) \quad \varphi = \sum_{i,j} b_{i,j} \frac{d(u_i, u_{i+1})}{d(x_j, x_{j+1})} \quad i, j = 1, 2, 3$$

dove le  $b$  sono costanti arbitrarie. Quindi la funzione più generale che abbia tutte le proprietà richieste dalla  $f$  sarà

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi = f + \varphi &= \sum_{k,i,j} a_{i,j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{i,j} b_{i,j} \frac{d(u_i, u_{i+1})}{d(x_j, x_{j+1})}. \end{aligned} \right.$$

4. Affinchè poi  $\pi$  sia un potenziale elastico e, quindi, le (2') possano essere interpretate come equazioni dell'elasticità, si richiede ancora che  $\pi$  dipenda dalle derivate  $\frac{\partial u_p}{\partial x_q}$  soltanto per mezzo delle combinazioni:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Per trovare le condizioni che devono essere verificate fra le costanti che compaiono in  $\pi$  affinchè il fatto indicato si verifichi, poniamo:

$$(8) \quad e_{p,q} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) \quad \sigma_{p,q} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_p}{\partial x_q} - \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right).$$

Avremo allora:

$$(9) \quad e_{p,q} = e_{q,p}, \quad \varpi_{p,q} = -\varpi_{q,p}, \quad \varpi_{p,p} = 0, \quad \frac{\partial u_p}{\partial x_q} = e_{p,q} + \varpi_{p,q},$$

e, ritenendo per un momento le  $e_{p,q}$  come variabili indipendenti in modo che non si tenga conto delle relazioni  $e_{p,q} = e_{q,p}$ , avremo anche

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi \left( \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) &= \pi(e_{p,q} + \varpi_{p,q}) = \pi(e_{p,q}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\partial \pi}{\partial e_{i,i+1}} - \frac{\partial \pi}{\partial e_{i+1,i}} \right) \varpi_{i,i+1} + \pi(\varpi_{p,q}), \end{aligned} \right.$$

dove, è quasi inutile dirlo, la  $\pi$  che compare sotto i segni di derivazione è  $\pi(e_{p,q})$ . Devono dunque essere verificate identicamente le equazioni:

$$(11) \quad \pi(\varpi_{p,q}) = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial e_{i,i+1}} - \frac{\partial \pi}{\partial e_{i+1,i}} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Poichè ora si può scrivere:

$$\begin{aligned} \pi(\varpi_{p,q}) &= \sum_i [a_{i,i} + a_{i+1,i+1} + b_{i,i} + \frac{1}{2} (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i})^2] \varpi_{i,i+1}^2 \\ &+ \sum_i [2a_{i+1,i+2} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+2} - \alpha_{i+2,i}) - b_{i,i+2} - b_{i+2,i}] \varpi_{i,i+1} \varpi_{i,i+2} \end{aligned}$$

la prima delle (11) ci dà:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{i,i} + a_{i+1,i+1} + b_{i,i} + \frac{1}{2} (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i})^2 &= 0, \\ 2a_{i+1,i+2} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+2} - \alpha_{i+2,i}) - b_{i,i+2} - b_{i+2,i} &= 0 \\ i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right.$$

Analogamente, dall'essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial e_{i,i+1}} - \frac{\partial \pi}{\partial e_{i+1,i}} &= 2 \sum_h a_{i+1,h} e_{i,h} - 2 \sum_h a_{i,h} e_{i+1,h} + \\ &+ (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) \sum_h \alpha_{h,h} e_{h,h} + (b_{i,i+1} - b_{i+1,i}) e_{i+1,i+2} + \\ &+ (b_{i+2,i} - b_{i,i+2}) e_{i+2,i} + (b_{i+1,i+2} - b_{i+2,i+1}) e_{i+2,i+2}, \end{aligned}$$

tenendo anche conto delle (9), le ultime equazioni (11) ci danno:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} 2a_{i,i+1} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) \alpha_{i,i} &= 0, \\ -2a_{i,i+1} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) \alpha_{i+1,i+1} &= 0, \\ (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) \alpha_{i+2,i+2} + b_{i+1,i+2} - b_{i+2,i+1} &= 0, \\ 2(a_{i+1,i+1} - a_{i,i}) + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i}) &= 0, \\ 2a_{i+1,i+2} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+2} + \alpha_{i+2,i}) + b_{i+2,i} - b_{i,i+2} &= 0, \\ -2a_{i,i+2} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i+1,i+2} + \alpha_{i+2,i+1}) + b_{i,i+1} - b_{i+1,i} &= 0, \\ i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right.$$

Le (12) e le (13) formano un sistema di 24 equazioni dalle quali eliminando le quindici costanti  $a$  e  $b$ , si ottengono le equazioni seguenti fra le sole  $\alpha$ :

$$(14) \quad \begin{cases} (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i} + \alpha_{i+1,i+1}) = 0, \\ \sum_{i=1}^3 (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i}) = 0, \\ (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+2} + \alpha_{i+2,i}) - (\alpha_{i+1,i+2} - \alpha_{i+2,i+1}) (\alpha_{i,i} + \alpha_{i+1,i+1}) = 0, \\ (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i+1,i+2} + \alpha_{i+2,i+1}) - (\alpha_{i+2,i} - \alpha_{i,i+2}) (\alpha_{i,i} + \alpha_{i+1,i+1}) = 0, \end{cases}$$

potendo, nella 1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> di queste equazioni, l'indice  $i$  assumere i valori 1, 2, 3 e gli indici essendo eguali quando sieno congrui rispetto al mod. 3.

5. Le equazioni (14) del primo rigo ci mostrano che possiamo distinguere quattro casi a seconda che nessuna, una, due, o tre delle differenze  $\alpha_{i,j} - \alpha_{j,i}$  si annullano. Però le equazioni (14) del 3° e 4° rigo mostrano che quando, per un determinato valore di  $i$ , sia  $\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i} = 0$ , basta che una delle altre due differenze  $\alpha_{i+1,i+2} - \alpha_{i+2,i+1}$ ,  $\alpha_{i+2,i} - \alpha_{i,i+2}$  sia diversa da zero perchè si abbia di necessità anche  $\alpha_{ii} + \alpha_{i+1,i+2} = 0$ . Si conclude di qui che i quattro casi precedenti si riducono soltanto ai due casi:

1°.  $\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; 2°.  $\alpha_{ii} + \alpha_{i+1,i+1} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

1°. Nel primo caso le (14) sono, senz'altro, identicamente soddisfatte, mentre le (12) e (13) ci danno:

$$a_{i,j} = b_{i,j} = 0, \quad i \neq j; \quad a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = n, \quad b_{1,1} = b_{2,2} = b_{3,3} = -2n,$$

e quindi

$$(15) \quad \pi = 2n [\sum_i (e_{i,i}^2 + 2e_{i,i+1}^2) - (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2] + \frac{1}{2} (\sum_{i,j} \alpha_{i,j} e_{i,j})^2$$

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}.$$

In questa espressione di  $\pi$  la  $n$  e le  $\alpha_{i,j}$  restano completamente arbitrarie.

2°. Nel secondo caso si richiede intanto che sia:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0, \quad a_{i,j} = 0, \quad b_{i,j} = b_{j,i} \quad i \neq j;$$

dalle (14) si deduce anche:

$$\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i} = 0, \quad i \neq j$$

e, quindi dalle (12) e (13):

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = n, \quad b_{ii} = -2n - 2\alpha_{i,i+1},$$

$$b_{i,i+1} = -2\alpha_{i,i+1} \alpha_{i+1,i+2}, \quad i = 1, 2, 3$$

e restano arbitrarie le costanti  $n$ ,  $\alpha_{1,2}$ ,  $\alpha_{2,3}$ ,  $\alpha_{3,1}$ .

Nell'espressione di  $\pi$ , corrispondente a questo caso, la parte che ha per fattore  $n$  coincide con l'analoga espressione che compare in (15). Scriviamo quindi soltanto l'altra parte che è

$$(16) \quad -2 \left[ \sum_i \alpha_{i,i+1}^2 (e_{i,i} e_{i+1,i+1} - e_{i,i+1}^2) + \right. \\ \left. + \sum_i \alpha_{i,i+1} \alpha_{i+1,i+2} (e_{i,i+1} e_{i+1,i+2} - e_{i+1,i+1} e_{i,i+2}) \right].$$

Se nella (15) si pone  $\alpha_{11} = \alpha_{26} = \alpha_{33}$ ,  $\alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{1,2} = 0$ , si ha il caso dell'isotropia.

**Biologia.** — *Contributo alla conoscenza della spermatogenesi negli Ortoteri* <sup>(1)</sup>. Nota preliminare del dott. GUSTAVO BRUNELLI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Oggetto delle mie ricerche è stato il *Gryllus* (in particolare *Gryllus desertus*) la cui spermatogenesi in parte già ci è nota, grazie ai lavori di Baumgartner <sup>(2)</sup>, di Voïnov <sup>(3)</sup> e di Guthertz <sup>(4)</sup>.

Alcuni fatti da me posti in luce circa le cinesi spermatogoniali, il comportamento dell'eterotropocromosomo <sup>(5)</sup>, la pseudoriduzione, la meiosi <sup>(6)</sup> saranno qui brevemente esposti e poi sviluppati nel lavoro definitivo.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel R. Istituto di Anatomia comparata. Roma.

<sup>(2)</sup> Baumgartner W. J., *Spermatid transformations in Gryllus assimilis, with special reference to the Nebenkern*. Kansas University Science Bulletin, 1902, vol. I; *Some new evidences for the individuality of chromosomes*, Biol. Bull., vol. 8°, 1904.

<sup>(3)</sup> Voïnov N., *Sur une disposition spéciale de la chromatine, dans la spermatogénèse du Gryllus campestris, reproduisant des structures observées seulement dans l'ovogénèse*. Arch. zool. expér., vol. 2°, 1904.

<sup>(4)</sup> Guthertz S., *Zur Kenntnis der Heterochromosomen*, Arch. mikrosk. Anat., vol. 69, 1906.

<sup>(5)</sup> Come è noto Wilson ha distinto tre categorie di eterocromosomi o cromosomi diversi dagli ordinari (autosomi) per il loro comportamento, cioè gli eterotropocromosomi, i microsomi e gli idiocromosomi. Queste due ultime categorie comprendono eterocromosomi che nelle spermatogonie si presentano doppi (diplosomi di Montgomery) gli eterotropocromosomi invece appaiono univalenti (monosomi di Montgomery). Gli eterotropocromosomi (monosomi) corrispondono al cromosoma speciale (De Sinety) chromatin nucleolus o cromosoma  $x$  di Montgomery, cromosoma accessorio di Mc Clung. Gli idiocromosomi sono tipicamente disuguali, i microsomi uguali; in generale cioè si potrebbe dire che i primi si presentano come eterodiplosomi, i secondi come omodiplosomi. Gli eterocromosomi si distinguono essenzialmente per un diverso comportamento riguardo al concentramento della cromatina (eteropienosi secondo Guthertz), riguardo all'accoppiamento (eterosindesi o asindesi-Guthertz) e riguardo alla divisione (eterocinesi in contrapposto all'eucinesi-Guthertz).

<sup>(6)</sup> Uso qui il termine di meiosi per indicare i processi maturativi secondo la nomenclatura di Farmer e Moore: Farmer F. B. and Moore F. E. S., *On the meiotic phase (reduction divisions) in animals and plants*. Quart. Journ. of micr. Sc., N. 192, 1905.