ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Matematica. — *Le varietà a curve sezioni ellittiche.* Nota di G. Scorza, presentata dal Socio E. Bertini.

In una sua Nota inserita in questi Rendiconti [1] il prof. Castelnuovo dimostrò in maniera semplice ed elegante che ogni superficie a curve sezioni ellittiche o è rigata o può ottenersi come proiezione da una superficie non rigata d'ordine n appartenente a uno spazio a n dimensioni; e allora, tenendo conto di un noto risultato del prof. Del Pezzo, egli riuscì a caratterizzare la famiglia delle superficie a curve sezioni ellittiche mediante il teorema:

Ogni superficie a curve sezioni ellittiche o è rigata o è razionale. Nell'ultimo caso ha l'ordine $n \leq 9$ *ed è rappresentabile sul piano in modo che le sue sezioni iperpiane abbiano per immagini le cubiche di un sistema lineare con* $9 - n$ *punti base semplici o (per* $n = 8$*) le quartiche di un sistema lineare con due punti base doppi.*

Poco tempo dopo il prof. Enriques [2], valendosi di questo risultato, si occupò della determinazione delle varietà a tre dimensioni a curve sezioni ellittiche, e le sue ricerche, riassunte in due Note pubblicate pure in questi Rendiconti, furono esposte poi, insieme con altre, in una Memoria pubblicata nei *Mathematische Annalen* [3]. Da esse risulta che:

Ogni varietà a tre dimensioni a curve sezioni ellittiche o è una ∞^1 *ellittica di piani o è razionale, eccettuata (forse) la forma cubica dello spazio a quattro dimensioni. Se è razionale appartiene al massimo a un* S_9 *ed ha al massimo l'ordine* 8 *ed è rappresentabile sullo spazio ordinario mediante un sistema lineare di quadriche o di superficie cubiche.*

In un lavoro che uscirà prossimamente alla luce io ho cercato di compiere le ricerche del prof. Enriques determinando tutte le varietà a curve sezioni ellittiche e assegnandone le più notevoli proprietà proiettive. Poichè il teorema fondamentale a cui si perviene risolve in modo definitivo la questione sollevata dal teorema del prof. Castelnuovo, non mi sembra inutile darne qui l'enunciato.

Una immediata estensione del ragionamento del prof. Castelnuovo dà subito che:

Ogni varietà a k *dimensioni a curve sezioni ellittiche o è una* ∞^1

(1) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche*; questi Rendic. 1° sem. 1894.

(2) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche*; questi Rendic. 1° sem. 1894.

(3) Bd. XLVI (1895), pp. 179-199.

ellittica di S_{k-1} *o, se il suo ordine n è maggiore di* 3, *è razionale ed è rappresentabile sopra un* S_k *mediante un sistema lineare di forme cubiche*; quindi la determinazione delle varietà in discorso è ridotta a quella di certi sistemi lineari di forme cubiche di cui sono note le varietà base.

Si trova così che:

Se V_k^n *è una varietà razionale normale non conica a curve sezioni ellittiche d'ordine n e dimensioni k* $(n, k > 3)$ *essa è*:

a) per $n = 4$ *la quartica base di un fascio di quadriche nello spazio a* $k + 2$ *dimensioni*;

b) per $n = 5$ *una* V_4^5 *di* S_7 *o una* V_5^5 *di* S_8 *o infine una* V_6^5 *di* S_9;

c) per $n = 6$ *una* V_4^6 *di* S_8.

La rappresentazione della V_k^4 sopra un S_k mediante proiezione da una sua retta era stata già studiata dal Rosati (¹); così pure non sono essenzialmente nuove le varietà *b*) e *c*), ma nuovi paiono alcuni dei risultati ai quali intorno ad esse si perviene. La V_6^5 del tipo *b*) si può generare mediante quattro S_3 di un S_9 riferiti omograficamente in maniera opportuna e allora si riconosce subito che essa è *la varietà delle rette di uno spazio a quattro dimensioni*. Con ciò si stabilisce una semplice rappresentazione sopra un S_6 di quest'ultima varietà, che, evidentemente, è razionale, si vede che la V_5^5 e V_4^5 del tipo *b*) insieme con la V_3^5 di S_6 del prof. Enriques non sono altra cosa che la varietà delle rette di un complesso lineare di S_4 o delle rette comuni a due o tre di tali complessi lineari, e si ritrovano per altra via risultati già ottenuti dal prof. Castelnuovo (²).

La V_4^6 del tipo *c*) è poi la varietà studiata dal prof. Segre in una sua Nota inserita nel t. V dei Rend. del Circ. Mat. di Palermo. Essa è generabile mediante tre sistemi piani collineari generici di S_8 e quindi può definirsi come la varietà delle coppie dei punti di due piani. Ne segue, per es., che una delle tre V_3^6 di S_7 incontrate dal prof. Enriques è la varietà delle coppie di un connesso di punti definito da una reciprocità qualsiasi fra due piani.

(¹) Rosati, *Rappresentazione della quartica* etc. (Annali di matematica, 1 (3) 1899).

(²) Castelnuovo, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni* (Atti del R. Ist. Veneto, ser. VII, t. II, 1891).