ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Fisica matematica. — *Sull'influenza di uno strato dielettrico in un campo elettromagnetico.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Corrispondente LEVI-CIVITA.

Nella presente Nota studio l'influenza di uno strato coibente in un campo elettromagnetico: questione che è sorta dai celebri studî sperimentali in contradditorio dei sigg. Pender e Crémieu sulla convezione elettrica, e che fu già studiata teoricamente [1]. I risultati del presente studio sono in completa contraddizione con le idee del sig. Karpen e quindi coi precedenti risultati teorici, e sembra si accordino meglio con le osservazioni di Pender e Crémieu. Appunto perciò mi risolvo a pubblicarli, pensando che forse mai una teoria è così da notarsi, come quando discorda con altre, e può dare origine quindi a qualche dubbio.

Non risolvo però, per gravi difficoltà analitiche, che non riuscii a superare, il problema, che meglio servirebbe al confronto dei risultati teorici con quelli sperimentali, come dirò alla fine del lavoro.

Per i campi elettrostatici ho potuto dare una conferma diretta analitica dei risultati, cui porta la teoria qui svolta; per i campi elettrodinamici più generali, tale controllo mi presentò difficoltà insormontabili. Ciononostante la teoria qui svolta si riconosce anche in tale caso in pieno accordo col teorema di Poynting.

Il presente lavoro si può, sotto certi riguardi, considerare come un complemento ad alcune ricerche [2] del prof. Levi-Civita. Mi è sembrato quindi inutile riportare in extenso metodi e risultati delle sue Memorie, che io, per brevità, supporrò senz'altro note al lettore.

2. Noi studieremo l'influenza di uno strato coibente S su un campo elettromagnetico. Se d, ε sono lo spessore, e la costante dielettrica di S, e se d è abbastanza piccolo, ossia se S è abbastanza sottile, noi sostitui-

[1] Picciati, *Sull'influenza dei dielettrici* ecc., Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1904; Pender e Crémieu, Journal de Physique, 1903, ser. 4ª, tomo 2°. A risultati opposti a quelli di questi ultimi fisici, e più concordi alla teoria del prof. Picciati, è giunto sperimentalmente il sig. Vasilesco-Karpen (loc. cit.). Il prof. Picciati ha anzi adottato l'ipotesi del sig. Karpen, come punto di partenza della trattazione analitica. Secondo questa ipotesi, un sottile strato dielettrico porterebbe certi determinati potenziali ritardati di doppio strato come contributo ai potenziali del campo.

[2] Levi-Civita, *La teoria elettrodinamica di Hertz* ecc, Rend. della R. Accad. dei Lincei (agosto 1902); *Sulla riduzione delle equazioni di Helmholtz alla forma Hertziana* (Nuovo Cimento, 1897); *Sur le champ électromagnetique* etc. Ann. de la Faculté de Toulouse, S. 2, T. 4; cfr. anche Abraham, *Electromagnetische Thorie der Strahlung* (Teubner, 1905, pag. 287).

remo allo studio della distribuzione elettro-magnetica nel campo, ove esiste S, lo studio di quella distribuzione limite, che si ottiene facendo tendere d a zero, mentre ε cresce indefinitamente, in guisa che εd resti uguale a una costante h. Vale a dire allo strato S sostituiamo una superficie s, che abbia una *costante dielettrica superficiale* uguale ad h. Per i campi elettrostatici dimostreremo direttamente l'esattezza di questo procedimento; per i campi elettrodinamici invece noi non potremo giustificarlo, che servendoci di un ragionamento per analogia. Come cioè allo studio di uno strato conduttore di spessore abbastanza piccolo si può sostituire l'esame dell'influenza di una superficie conduttrice avente una conducibilità *superficiale* finita, così sorge spontaneo un tale punto di vista anche per lo studio degli strati coibenti, tanto più quando si pensi all'analogia, che, secondo la teoria di Maxwell, passa tra correnti di conduzione in un conduttore, e correnti di spostamento in un dielettrico. Questo metodo del resto non è una novità neanche per gli strati coibenti (cfr. loco cit.), e noi del resto ne confermeremo, come già dicemmo, l'esattezza almeno per i campi elettrostatici.

L'analogia, cui più sopra accennammo, tra correnti di conduzione e correnti di spostamento ci fa già prevedere quale sarà l'influenza di tale superficie s: basterà infatti applicare lo stesso metodo, che si applica allo studio delle superficie conduttrici, per dimostrare che (Levi-Civita, loc. cit.):

Se s è una superficie dielettrica di costante dielettrica superficiale uguale a h, immersa nell'etere, allora la forza elettrica tangenziale si mantiene continua quando si attraversa s; la forza magnetica tangenziale subisce invece un salto brusco, definito da un vettore proporzionale in grandezza alla corrente di spostamento superficiale, e normale a questa.

Se poi si trattasse di uno strato, che risultasse dalla sovrapposizione di uno strato coibente e di uno strato conduttore, *varrebbe un teorema analogo, purchè, anzichè parlare di corrente di spostamento, si parlasse della corrente complessiva, somma della corrente di conduzione e della corrente di spostamento nei due strati parziali.* Altrettanto si dica per quei corpi, che posseggono contemporaneamente una costante dielettrica e una conducibilità. Restando per ora nel caso dei soli strati coibenti, indichiamo con α, β, γ i coseni direttori della normale a s, il cui verso positivo sia scelto ad arbitrio; e, come al solito, indichiamo con A e con X, Y, Z, L, M, N l'inversa della velocità della luce, e le componenti delle forze elettrica e magnetica. Con X_T, Y_T, Z_T indichiamo le componenti della forza elettrica tangenziale. Il teorema precedente si può enunciare, dicendo che X_T, Y_T, Z_T *devono essere continue su s, e che* L, M, N *subiscono, quando si attraversi s nel senso della normale positiva, gli incrementi*:

$$Ah\frac{d}{dt}(\beta Z_T - \gamma Y_T) \ ; \ Ah\frac{d}{dt}(\gamma X_T - \alpha Z_T) \ ; \ Ah\frac{d}{dt}(\alpha Y_T - \beta X_T).$$

3. Le due condizioni testè enunciate costituiscono, insieme con le equazioni di Hertz nei restanti punti del campo, le formole fondamentali per la teoria di un campo elettromagnetico, in cui esistono sottili strati coibenti.

Bisogna dimostrare (se si vuole che la teoria resti conforme allo spirito generale delle teorie Hertziane) che esse bastano a caratterizzare l'andamento generale dei fenomeni; cosicchè, per loro mezzo, le condizioni iniziali del campo determinano lo stato del campo stesso per tutto il tempo avvenire. Dalle equazioni di Hertz si deduce infatti mediante integrazioni per parti (Levi-Civita, loc. cit., Rend. della R. A. d. L.) che, posto

$$\Omega = \frac{1}{8\pi}\int [X^2 + Y^2 + Z^2) + (L^2 + M^2 + N^2)]\, dS\,,$$

(dove l'integrazione è estesa a tutto il campo S, e dove con dS si indica l'elemento di volume di S), allora vale la:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{4\pi A}\int_s \begin{vmatrix} X_T & Y_T & Z_T \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} ds \qquad (t = \text{tempo})$$

dove l'integrale del secondo membro è esteso alla, o alle superficie s, e dove con λ, μ, ν indico gli incrementi, sopra determinati, che le L, M, N subiscono sulle superficie s. Se ne deduce tosto che:

$$\frac{d}{dt}\left\{\Omega + \frac{h}{8\pi}\int_s [\beta Z_T - \gamma Y_T)^2 + (\gamma X_T - \alpha Z_T)^2 + (\alpha Y_T - \beta X_T)^2]\, ds\right\} = 0\,.$$

Cosicchè se l'espressione tra graffe, cioè se

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\int_S [(X^2 + Y^2 + Z^2) + (L^2 + M^2 + N^2)]\, dx\, dy\, dz + \right.$$
$$\left. + \int_s [(\beta Z_T - \gamma Y_T)^2 + (\gamma X_T - \alpha Z_T)^2 + (\alpha Y_T - \beta X_T)^2]\, ds\right\}$$

è nulla all'istante iniziale, essa è nulla per ogni valore di t. E (poichè si tratta di integrali di funzioni positive) ne deduciamo tosto che, se X, Y, Z, L, M, N sono nulle all'istante iniziale, esse sono ancora nulle in tutti gli istanti successivi; ciò che basta a dimostrare l'enunciato teorema di unicità. Notiamo che le formole precedenti valgono nell'ipotesi, a cui ci possiamo limitare per il nostro scopo, che manchino correnti di conduzione, ossia che manchi ogni sviluppo di calore di Joule: il risultato è del resto generale.

4. Verificheremo ora direttamente per i campi elettrostatici le conseguenze della precedente teoria; e supporremo senz'altro, ciò che basta al nostro scopo, l'esistenza di un solo punto elettrizzato A di fronte a uno strato coibente limitato dai due piani paralleli $z = 0$, e $z = -d$, e di costante dielettrica uguale a ε. Il punto A sia il punto $(0, 0, m)$; e sup-

poniamo senz'altro $m > d$, $d > 0$. Indichiamo con r le distanze di un punto generico da A_1 e con r_1 le distanze dal punto $A_1 = (0, 0, -m)$, simmetrico di A rispetto al piano $z = 0$.

Il potenziale F del campo sarà dato dalla:

$$\text{(I)} \qquad F = \frac{\mu}{r} + U_1 + U_2$$

dove μ è una costante, dipendente dalla quantità di elettricità in A, U_1, U_2 sono potenziali di strato semplice estesi ai piani $z = 0$, $z = -d$: piani che, per simmetria, indicheremo con s_1, e con s_2.

Se noi indichiamo con $\frac{\partial}{\partial s_i^+}$, e con $\frac{\partial}{\partial s_i^-}$ le derivate rispetto a z prese nei punti del piano $s_i (i = 1, 2)$ rispettivamente dalla banda esterna, o interna allo strato coibente, è ben noto [1] che dovrà essere:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial U_1}{\partial s_i^+} + \frac{\partial U_2}{\partial s_i^+} + \frac{\partial \frac{\mu}{r}}{\partial s_i^+} = \varepsilon \left(\frac{\partial U_1}{\partial s_i^-} + \frac{\partial U_2}{\partial s_i^-} + \frac{\partial \frac{\mu}{r}}{\partial s_i^-} \right).$$

Ricordiamo che d'altra parte è

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial U_i}{\partial s_i^+} = - \frac{\partial U_i}{\partial s_i^-} \quad (i = 1, 2) \qquad \frac{\partial U_i}{\partial s_h^+} = \frac{\partial U_i}{\partial s_h^-} \quad (i \neq h \; ; \; i, h = 1, 2).$$

La (1) scritta successivamente per $i = 1$, e $i = 2$ diventa:

$$(1)^{bis} \qquad (\varepsilon + 1) \frac{\partial U_1}{\partial z^+} - (\varepsilon - 1) \frac{\partial U_2}{\partial z^+} - (\varepsilon - 1) \frac{\partial}{\partial z^+} \frac{\mu}{r} = 0 \quad \text{per } z = 0 \, (s_1)$$

$$(1)^{ter} \qquad -(\varepsilon - 1) \frac{\partial U_1}{\partial z^+} + (\varepsilon + 1) \frac{\partial U_2}{\partial z^+} - (\varepsilon - 1) \frac{\partial}{\partial z^+} \frac{\mu}{r} = 0 \quad \text{per } z = -d \, (s_2).$$

Ricordando che su s_1 si ha $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{r} = - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{r_1}$ la $(1)^{bis}$ si può scrivere:

$$(\varepsilon + 1) \frac{\partial U_1}{\partial z^+} - (\varepsilon - 1) \frac{\partial U_2}{\partial z} + (\varepsilon - 1) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{r_1} = 0 \quad \text{per } z = 0.$$

E poichè nella regione T_1 definita dalla $z \geq 0$, le U_1, U_2, $\frac{\mu}{r_1}$ sono funzioni armoniche regolari nulle all'infinito, se ne dedurrà:

$$\text{(3)} \qquad (\varepsilon + 1) U_1 - (\varepsilon - 1) U_2 + (\varepsilon - 1) \frac{\mu}{r_1} = 0 \quad (\text{per } z \geq 0, \text{ ossia in } T_1).$$

[1] Föppl. u. Abraham, *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität*, § 39.

E dalla $(1)^{ter}$ si dedurrà similmente che nella regione T_2 definita dalla $z \leq -d$ vale la:

(4) $$(\varepsilon + 1)\, U_2 - (\varepsilon - 1)\, U_1 - (\varepsilon - 1)\, \frac{\mu}{r} = 0$$

(per $z \leq -d$, ossia in T_2).

Ma U_i ha valori uguali in punti simmetrici rispetto a σ_i; quindi:

(5) $$U_1(x, y, z) = U_1(x, y, -z) \;;\; U_2(x, y, z) = U_2(x, y, -2d - z).$$

Evidentemente poi:

$(5)^{bis}$ $$r(x, y, z) = r_1(x, y - z).$$

La (4) per le (5) diventa:

$$(\varepsilon + 1)\, U_2(x, y, -2d - z) - (\varepsilon - 1)\, U_1(x, y, -z) -$$
$$- (\varepsilon - 1)\, \frac{\mu}{r_1(x, y, -z)} = 0 \quad (z \leq -d)$$

donde, mutando z in $-z$, si ha:

$(3)^{bis}$ $$(\varepsilon - 1)\, U_1(x, y, z) = (\varepsilon + 1)\, U_2(x, y, -2d + z) -$$
$$- (\varepsilon - 1)\, \frac{\mu}{r_1(x, y, z)} \quad (\text{per } z \geq d).$$

Analogamente dalla (3) si potrebbe dedurre un'equazione $(4)^{bis}$ valida per $z \leq 0$. Le (3) e $(3)^{bis}$ valgono entrambe per $z \geq d$.

Per $z \geq 0$ le (I) e (3) dànno:

(II) $$F = \frac{\mu}{r} + U_1 + U_2 = \frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\, \frac{\mu}{r_1} + 2\, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}\, U_2 \quad (\text{per } z \geq 0).$$

Per $z \geq d$ le (I), (3) e $(3)^{bis}$ dànno:

(III) $$F(x, y, z) = \frac{\mu}{r} + \frac{\varepsilon + 1}{2}\, [U_2(x, y, z) - U_2(x, y, z - 2d)]$$

(per $z \geq d$) (¹).

Per $z \leq -d$ le (I) e (4) dànno:

(II)' $$F = \frac{\mu}{r} + U_1 + U_2 = 2\, \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\, U_2(x, y, z) \quad (\text{per } z \leq -d).$$

Dalle (I), (4), $(4)^{bis}$ si deduce la:

(III)' $$F(x, y, z) = \frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon - 1}{2}\, [U_2(x, y, z) - U_2(x, y, z - 2d)]$$

(per $z \leq -d$).

Le conseguenze di queste formole saranno date in una seconda Nota.

(¹) La precedente formola si deduce, eliminando r_1 ed u_2 dalle (I), (3), e $(3)^{bis}$.