ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Il nostro compito, dal punto di vista tecnico, è esaurito. Nei cristalli, siano essi a uno o a due assi ottici, sono determinabili tutte le costanti ottiche, indici, assi e piani principali, bastando a ciò un solo piano riflettente, che per di più può avere una posizione qualsiasi. E in questo metodo di determinazione nè si fa uso di riflessione totale rispetto a mezzi più rifrangenti, nè si fa uso di prismi: ma vi interviene unicamente la riflessione con la deviazione del piano di polarizzazione del raggio riflesso rispetto a quello del raggio incidente, deviazione determinabile con grande esattezza.

Rimane un compito molto più importante, cioè quello di vedere come il metodo sia utilizzabile praticamente e quale ne sia l'esattezza; a ciò spero contribuire con una terza Nota sullo stesso argomento.

Fisica matematica. — *Sull'influenza di uno strato dielettrico in un campo elettromagnetico.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Corrispondente LEVI-CIVITA.

5. Riprendiamo le notazioni della Nota precedente (Questi Rendiconti, pag. 195). E supponiamo per un momento, salvo a dimostrarlo più tardi, che si possa passare al limite per $d = \frac{h}{\varepsilon} = 0$ $(h = \text{cost})$, e che la U_2 e le sue derivate si conservino finite. Dalle (III) e (III)′ risulta che il contributo $U_1 + U_2 = F - \frac{\mu}{r}$, dovuto allo strato, o alla superficie dielettrica limite, si può considerare come un doppio strato tanto nella regione $z \geq 0$, quanto nel semispazio $z \leq 0$. Infatti nelle nostre ipotesi è

$$\left.\begin{aligned} \lim\left(F - \frac{\mu}{r}\right) &= \quad h\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \text{per } z \geq 0 \\ \lim\left(F - \frac{\mu}{r}\right) &= -h\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \text{per } z \leq 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dove si è posto } u = \lim U_2 .$$

Ma però questo doppio strato si deve prendere con segni opposti nelle due regioni; esso equivale perciò a *uno strato semplice* di elettricità libera posto sulla nostra superficie coibente. Ciò che conferma nel modo più completo i nostri precedenti risultati; in quanto che, soltanto nell'ipotesi che il contributo portato da una superficie coibente al potenziale elettrostatico sia un integrale di strato semplice, la forza elettrica tangenziale si può conservare continua. Almeno per i campi elettrostatici pare dunque che la teoria, sopra svolta, sia più conforme all'insieme delle idee Hertziane di quanto non avvenga per le altre teorie: nelle quali una superficie coibente darebbe origine a un integrale di doppio strato.

Anzi, se ammettiamo lecito il passaggio al limite, troviamo dal confronto delle (II), (III) che

$$h \frac{du}{dz} = 2u - \frac{\mu}{r_1} \quad \text{per } z \geqq 0 \quad (u = \lim U_2) .$$

Dalle (II)′ e (III)′ troviamo similmente

$$- h \frac{du}{dz} = 2u - \frac{\mu}{r} \quad \text{per } z \leqq 0 \quad (u = \lim U_2).$$

Ricordando che u deve essere armonica, ne deduciamo facilmente che u ha valori uguali in punti simmetrici rispetto al piano $z = 0$ (conformemente al fatto che u deve essere un integrale di semplice strato esteso a questo piano) e che p. es. nel semispazio $z \geqq 0$ è

(IV)
$$u = e^{\frac{2}{h} z} \left[\frac{\mu}{h} \int_z^{+\infty} \frac{1}{r_1} e^{-\frac{2}{h} z} dz \right] ;$$
$$F = \frac{\mu}{r} + h \frac{du}{dz} = \frac{\mu}{r} + 2u - \frac{\mu}{r_1} = 2u + \mu \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) .$$

Se ne trae anzi, con integrazione per parti:

(IV)^{bis}
$$F_1 = \lim \left(F - \frac{\mu}{r} \right) = h \frac{du}{dz} = 2u - \frac{\mu}{r_1} = \mu \, e^{\frac{2}{h} z} \int_z \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} e^{-\frac{2}{h} z} dz ;$$

la F_1 è il contributo portato al potenziale elettrostatico da s. La densità ϱ dell'elettricità libera su s è così data da:

(IV)^{ter}
$$\varrho = - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{-\mu}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} e^{-\frac{2}{h} z} dz .$$

E si nota che per $h = \infty$, questa formola diventa

$$\varrho = \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{-\mu}{2\pi} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)_{z=0} .$$

E cioè il nostro strato dielettrico si comporta in tal caso, come era prevedibile, come uno strato conduttore.

Le (IV)^{bis} e le (IV)^{ter} sono suscettibili di *interpretazione generale*; se, anzichè un solo punto elettrizzato, noi avessimo nella regione $z \geqq 0$ una distribuzione elettrica qualsiasi, *continuerebbero a valore formole analoghe*, che si deducono dalle precedenti, ponendo al posto di $\frac{1}{r_1}$ quella funzione armonica, regolare nella regione $z \geq 0$, che sul piano $z = 0$ assume gli stessi valori, che il potenziale dovuto alla distribuzione elettrica data assumerebbe per $z = 0$ nel caso di assenza di strati coibenti. E questa funzione armonica si determina facilmente col metodo delle immagini. Resta così provata in generale una influenza degli strati coibenti simile a quella di uno strato, e non di un doppio strato.

Come vediamo, l'obiezione che Blondlot aveva rivolto a Crémieu sulla parte, che avrebbero avuto le superficie metalliche dell'apparecchio sui fenomeni da lui studiati, e che Crémieu aveva evitato, tra l'altro, con congiungimenti metallici alla terra, vale inalterata per quanto riguarda gli strati dielettrici, che Crémieu adoperava; nè il congiungimento alla terra poteva bastare ad eliminarli. Ci accostiamo così alle idee svolte più tardi da Crémieu e Pender; per quanto però non si possa dire di aver esaurito la questione, riferendosi il calcolo precedente a soli campi elettrostatici. Nè io credo che si possa senz'altro considerare lo spostamento della carica libera indotta su s (quando si muova il punto induttore) come una pura e semplice corrente di convezione; ciò faciliterebbe, è vero, la trattazione analitica, ma sarebbe poco conforme a quanto dicemmo più sopra, e sarebbe d'altra parte un teorema da dimostrare, piuttosto che un postulato da ammettere.

6. Essendo in una questione controversa necessario il massimo rigore, noi verificheremo le formole precedenti con l'effettivo passaggio al limite: che solo può giustificare le precedenti conclusioni.

Studiamo la regione $z \geq 0$. Il confronto delle (II), (III) dà:

$$\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} \mathrm{U}_2(z-2d) - 2\mu \frac{1}{\varepsilon+1} \frac{1}{r_1} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \mathrm{U}_2 \qquad (z \geq d) \tag{6}$$

dove $r_1 = r_1(x, y, z)$; $\mathrm{U}_2 = \mathrm{U}_2(x, y, z)$; $\mathrm{U}_2(x, y, z-2d) = \mathrm{U}_2(z-2d)$. La (6) individua la funzione U_2, armonica [1] e regolare per $z \geq -d$; la differenza v di due funzioni, soddisfacenti alle (6), soddisfa infatti alla

$$v(z) = \left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)^2 v(z-2d);$$

e quindi alla

$$v(z+2nd) = \left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)^{2n} v(z) \quad (n \text{ intero positivo}).$$

Ma poichè v si deve annullare all'infinito, deve essere $\lim\limits_{n=\infty} v(z+2nd) = 0$; e quindi $v(z) = 0$. Ora è ben evidente, come mostra un facile controllo, che la funzione U_2, definita dalla:

$$\mathrm{U}_2 = -\frac{2\mu}{\varepsilon-1} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{2s} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(m+z+2ds)^2}}, \tag{V}$$

soddisfa alle condizioni volute, ed è dunque la funzione cercata.

[1] Dicendo che U_2 è armonica, intendo anche che U_2 è nulla all'infinito.

La (V), *insieme alle* (II), (III), *risolve dunque completamente il problema dell'equilibrio elettrostatico in presenza di uno strato coibente, di spessore qualunque* d per mezzo di una serie, che tanto meglio converge quanto è più piccolo $\varepsilon - 1$, e quanto è maggiore d; la quale serie in certe condizioni si presta quindi meglio al calcolo numerico degli integrali (IV).

7. Dobbiamo ora nella (V) fare il passaggio al limite per $d = \frac{h}{\varepsilon} = 0$. Si scriva la (V) sotto la forma seguente:

$$\mathrm{U}_2 = \frac{\mu}{(\varepsilon - 1)\, d} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^{-\frac{z}{d}} \mathrm{L}, \text{ dove}$$

$$\mathrm{L} = 2d \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^{\frac{1+\varepsilon}{h}(z + 2sd)\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (m + z + 2ds)^2}}. \tag{7}$$

Osserviamo che

$$\lim (\varepsilon - 1)\, d = h \;;\; \lim \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^{-\frac{z}{d}} = \tag{8}$$
$$= \lim \left[\left(1 - \frac{2}{\varepsilon + 1} \right)^{\varepsilon + 1} \right]^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\frac{z}{d\varepsilon}} = e^{+2\frac{z}{h}}.$$

Per trovare il lim L, porremo

$$\left(1 - \frac{2}{\varepsilon + 1} \right)^{\frac{\varepsilon+1}{h}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}} = \mathrm{B}, \tag{9}$$

$$\mathrm{J} = \int_z^{\infty} \mathrm{B}^z \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (m + z)^2}}\, dz = \int_z^{\infty} \mathrm{B}^z \frac{1}{r_1}\, dz \;; \tag{10}$$

e dimostreremo separatamente

$$\lim |\mathrm{L} - \mathrm{J}| = 0, \tag{11}$$

$$\lim \left| \mathrm{J} - \int_z^{\infty} \frac{1}{r_1} e^{-\frac{2}{h}z}\, dz \right| = 0. \tag{12}$$

Dalle (11), (12) risulterà che $\lim \mathrm{L} = \int_z^{\infty} \frac{1}{r_1} e^{-\frac{2}{h}z}\, dz$; cosicchè, in virtù delle (7), (8) risulterà che al limite la (V) diventa la (IV). E sarà fatta la voluta verifica.

Cominciamo a dimostrare la (12). Dalla (9) si deduce $\lim \mathrm{B} = e^{-\frac{2}{h}}$; cosicchè, posto $\mathrm{B} = (e + \alpha)^{-\frac{2}{h}}$, si ha

$$\lim \alpha = 0\,, \left|(e+\alpha)^{-\frac{2}{h}z} - e^{-\frac{2}{h}z}\right| = \left|\mathrm{B}^z - e^{-\frac{2}{h}z}\right| < |\alpha|\,\mathrm{T}$$

dove T è il massimo valore assoluto di $\frac{2}{h}z(e+t)^{-\frac{2}{h}z-1}$ per t compreso tra 0 ed α. Ora se α è abbastanza piccolo, è $(e+t) > \frac{1}{2}e$; e quindi $\mathrm{T} \leq \frac{2}{h}z\left(\frac{1}{2}e\right)^{-\frac{2}{h}z-1}$, cosicchè

$$\left|\mathrm{J} - \int_z^\infty \frac{1}{r_1} e^{-\frac{2}{h}z}\, dz\right| =$$

$$= \left|\int_z^\infty \frac{1}{r_1}\left[\mathrm{B}^z - e^{-\frac{2}{h}z}\right] dz\right| < |\alpha| \int_z^\infty \frac{2}{h} z \frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{2}e\right)^{-\frac{2}{h}z-1} dz\,,$$

donde segue immediatamente la (12).

Passiamo ora alla (11). Per definizione di integrale è

$$(13) \qquad |\mathrm{J} - \mathrm{L}| \leq 2d \sum_1^\infty \mathrm{D}_s\,,$$

dove D_s è la oscillazione della funzione $\mathrm{B}^z \frac{1}{r_1}$ nell'intervallo $(z + 2ds - 2d, z + 2ds)$. Ora la oscillazione di B^z non supera $2d\,|\log \mathrm{B}|\,\overline{\mathrm{B}}_s$, quando con $\overline{\mathrm{B}}_s$ si indichi il il massimo di B^z nel citato intervallo; ma poichè, per d abbastanza piccolo è $\lim \mathrm{B} = e^{-\frac{2}{h}} < 1$, sarà $\overline{\mathrm{B}}_s < \mathrm{B}^{z+2ds-2d}$.

D'altra parte l'oscillazione di $\frac{1}{r_1}$ non supera il massimo di

$$2d \frac{m+z}{\sqrt{x^2+y^2+(m+z)^2}^{\,3}}$$

nello stesso intervallo, ossia non supera

$$\frac{2d}{\sqrt{x^2+y^2+(m+z+2ds-2d)^2}}\,.$$

Quindi

$$2d \sum_s \mathrm{D}_s \leq 2d \sum \frac{2d\,\mathrm{B}^{z+2ds-2d}}{\sqrt{x^2+y^2+(m+z+2ds-2d)^2}}\left[1 + |\log \mathrm{B}|\right].$$

Cosicchè sarà provata la (11), se sarà dimostrato che il secondo membro della (13) tende a zero, ossia se si dimostra che

$$K = 2d \sum_s B^{z+2ds-2d}$$

è *limitato*. Ora $\lim B < 1$; e quindi, per d abbastanza piccolo,

$$\sum_s B^{z+2ds-2d} = \frac{B^z}{1 - B^{2d}} .$$

Donde

$$K = B^z \frac{2d}{1 - B^{2d}} = B^z \frac{1}{\log B} \frac{(2d \log B)}{1 - e^{2d \log B}} .$$

Per $d = 0$ si ha dunque

$$\lim K = - \frac{1}{\log B} (\lim B)^z = \frac{h}{2} e^{-\frac{2}{h} z} .$$

La quantità K si conserva limitata c. d. d.

7. Affinchè la teoria su svolta sia confrontabile con le esperienze di Pender e Crémieu, sarebbe necessario trovare quale è il campo elettromagnetico generato da una carica mobile μ di fronte a uno strato s dielettrico, o anche di fronte a uno strato dielettrico e uno strato conduttore sovrapposti, quando anche si faccia l'ipotesi che la carica si muova di un moto traslatorio uniforme, e si cerchi il campo, che ne è generato, stazionario rispetto a un sistema di assi mobili, paralleli agli assi coordinati fissi, e invariabilmente connessi con la carica μ.

Se si cerca di risolvere questo problema mediante la teoria dei potenziali ritardati, si trova come contributo al potenziale elettrostatico dovuto allo strato s (supposto dapprima soltanto coibente) un potenziale ritardato di strato semplice, dato da una formola completamente analoga alla $(\mathrm{IV})^{bis}$; la ricerca invece del contributo portato da s al potenziale vettore si riduce alla risoluzione nella regione $z \geq 0$ di un sistema di equazioni differenziali che io sono riuscito a trattare nel solo caso di $h < 0$, mentre il problema fisico corrisponde invece al caso di $h > 0$. Mi sembrerebbe poi affrettato il cercare di integrare per approssimazione il problema, perchè ciò potrebbe essere causa di errore; e altrettanto poco sicuro mi sembra il metodo, cui accennammo in fine del numero 5.

Lo studio completo e rigoroso di questa questione potrà forse portare a un perfezionamento, o a una revisione della teoria.