ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Matematica. — *I teoremi d'esistenza per gl'integrali di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni.* Nota del dott. MAURO PICONE, presentata dal Socio U. DINI.

Si abbia l'equazione differenziale lineare ordinaria:

$$y^{(n)} = p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y + f(x);$$

i risultati del Fredholm sulle equazioni integrali lineari [1] offrono il modo di stabilire i teoremi d'esistenza per gli integrali di una tale equazione soddisfacenti ad una nuova ed estesissima classe di condizioni, come pure alle condizioni ai limiti fin qui considerate, nella sola ipotesi che i coefficienti $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e il termine noto $f(x)$ siano finiti e continui. Ciò appunto ci proponiamo di mostrare colla presente Nota [2].

§ 1. — *La funzione di Green.*

Siano a e b due punti, al finito, del tratto in cui la funzione $\varphi(x)$ è finita e continua; punti che potranno anche essere gli estremi di quel tratto quando esso sia finito. Vogliamo costruire una soluzione dell'equazione:

$$y^{(n)} = \varphi(x), \tag{1}$$

che soddisfi alle n condizioni lineari:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \int_a^b a_{ik}(\tau)\, y^{(k-1)}(\tau)\, d\tau = l_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Supponiamo le $a_{ik}(\tau)$ funzioni di τ assegnate, integrabili nel tratto (a, b) e le l_i quantità pur esse assegnate.

Noi consideriamo, nella presente Nota, le condizioni (2), ma risulterà ben evidente che i metodi da noi seguiti possono, senza modificazione alcuna, essere applicati alle condizioni, fin qui esclusivamente considerate, secondo le quali, supposto $k_1 + k_2 + \cdots + k_\nu = n$, in ν punti $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ di (a, b) sono dati, rispettivamente, i valori di k_1, di k_2, ..., di k_ν delle funzioni:

$$y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \tag{3}$$

(1) Acta Mathematica, Bd. 27.

(2) Debbo al mio amico dott. Eugenio Elia Levi l'incitamento a considerare la questione qui posta dal punto di vista dal quale, nella presente Nota, viene considerata.

e, più generalmente, a quelle secondo le quali sono date n combinazioni lineari $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dei valori che, rispettivamente, k_1 delle funzioni (3) prendono in h_1 punti di (a, b), k_2 delle funzioni (3) prendono in h_2 punti di (a, b), ..., k_n delle funzioni (3) prendono in h_n punti di (a, b).

Supponiamo in primo luogo nelle (2) le l_i tutte nulle, in guisa che le condizioni imposte ad una soluzione della (1) siano:

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \int_a^b a_{ik}(\tau)\, y^{(k-1)}(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Definiamo la funzione $g(x, \xi)$ col porre, per ogni valore di x:

$$g(x, \xi) = \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{per} \quad \xi \leq x$$
$$g(x, \xi) = 0 \quad \text{per} \quad \xi \geq x.$$

La $g(x, \xi)$, considerata rispetto a ξ (rispetto a x) è funzione finita e continua insieme alle sue prime $n-2$ derivate, mentre la sua $(n-1)^{ma}$ derivata ha una discontinuità nel punto x (nel punto ξ), ed è:

$$\left[\frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial \xi^{n-1}}\right]_{\xi=x-0} - \left[\frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial \xi^{n-1}}\right]_{\xi=x+0} = (-1)^{n-1}$$
$$\left[\frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=\xi+0} - \left[\frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=\xi-0} = 1.$$

L'integrale generale della (1) è definito dall'eguaglianza:

$$(5)\qquad y(x) = \int_a^b \varphi(\xi)\, g(x, \xi)\, d\xi + c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \cdots + c_2 x + c_1,$$

dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono le n costanti arbitrarie (¹).

Poniamo:

$$(jk) = (j-1)(j-2)\ldots(j-k-1),$$

si avrà:

$$y^{(k-1)} = \int_a^b \varphi(\xi)\, \frac{\partial^{k-1} g(x, \xi)}{\partial x^{k-1}}\, d\xi + \sum_{j=k}^{j=n} (jk)\, c_j x^{j-k}.$$

Perciò le condizioni (4) si traducono nelle seguenti n equazioni lineari fra le $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \int_a^b a_{ik}(\tau) \sum_{j=k}^{j=n} (jk)\, c_j \tau^{j-k} d\tau = -\sum_{k=1}^{k=n} \int_a^b \varphi(\xi)\, d\xi \int_a^b a_{ik}(\tau)\, \frac{\partial^{k-1} g(\tau, \xi)}{\partial \tau^{k-1}}\, d\tau$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

(¹) Sebbene $\frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}$ sia discontinua nel punto ξ è facilissimo vedere che è sempre:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^b \varphi(\xi)\, g(x, \xi)\, d\xi = \int_a^b \varphi(\xi)\, \frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\, d\xi = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Il coefficiente di c_k nelle i^{ma} equazione è:

$$\sum_{j=1}^{j=k}(kj)\int_a^b a_{ij}(\tau)\,\tau^{k-j}d\tau\,.$$

Le equazioni (4) saranno dunque soddisfatte da uno e da un sol sistema di valori per le $c_1\,, c_2\,, \dots\,, c_n$, nell' ipotesi che risulti:

$$\text{(7)}\qquad \begin{vmatrix} \int_a^b a_{11}(\tau)\,d\tau \;\dots\; \sum_{j=1}^{j=n}(nj)\int_a^b a_{1j}(\tau)\,\tau^{n-j}d\tau \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_a^b a_{n1}(\tau)\,d\tau \;\dots\; \sum_{j=1}^{j=n}(nj)\int_a^b a_{nj}(\tau)\,\tau^{n-j}d\tau \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Ben chiaramente, nell' ipotesi (7), risulterà:

$$c_k = \int_a^b \varphi(\xi)\,g_k(\xi)\,d\xi\,,$$

dove $g_k(\xi)$ sono polinomî di grado $n-1$ in ξ i cui coefficienti sono espressi, in modo che non ci importa di determinare, razionalmente per mezzo delle quantità:

$$\int_a^b a_{ik}(\tau)\,\tau^\nu d\tau \qquad \begin{pmatrix} i\,, k = 1\,, 2\,, \dots\, n \\ \nu = 0\,, 1\,, \dots\,, n-1 \end{pmatrix}.$$

Nell' ipotesi che le condizioni (4) soddisfino alla (7), esiste dunque uno ed un solo integrale della (1) verificante le condizioni (4) e, come si deduce dalla (5), esso è definito dall'eguaglianza:

$$y(x) = \int_a^b \varphi(\xi)\,g(x\,,\xi)\,d\xi + \sum_{k=1}^{k=n} x^{k-1}\int_a^b \varphi(\xi)\,g_k(\xi)\,d\xi\,,$$

cioè dalla:

$$\text{(8)}\qquad y(x) = \int_a^b \varphi(\xi)\left[g(x\,,\xi) + \sum_{k=1}^{k=n} x^{k-1} g_k(\xi)\right]d\xi\,.$$

Dopo ciò, definiamo la funzione $\mathrm{G}(x\,,\xi)$ delle due variabili x e ξ col porre:

$$\mathrm{G}(x\,,\xi) = g(x\,,\xi) + \sum_{k=1}^{k=n} x^{k-1} g_k(\xi)\,,$$

la $\mathrm{G}(x\,,\xi)$ è un polinomio di grado $n-1$ sia rispetto ad x che rispetto a ξ, per ogni valore della x (della ξ) è in $(a\,.\,b)$ funzione finita e continua della ξ (delle x) insieme alle sue prime $n-2$ derivate, mentre la sua derivata $(n-1)^{ma}$ ha una discontinuità nel punto x (nel punto ξ), è:

$$\left[\frac{\partial^{n-1}\mathrm{G}(x\,,\xi)}{\partial\xi^{n-1}}\right]_{\xi=x-0} - \left[\frac{\partial^{n-1}\mathrm{G}(x\,,\xi)}{\partial\xi^{n-1}}\right]_{\xi=x+0} = (-1)^{n-1}$$

$$\left[\frac{\partial^{n-1}\mathrm{G}(x\,,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=\xi+0} - \left[\frac{\partial^{n-1}\mathrm{G}(x\,,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=\xi-0} = 1\,.$$

Considerando la (8) si perviene al risultato:

Posto:

$$y(x) = \int_a^b \varphi(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi ,$$

la funzione $y(x)$ così definita soddisfa alla (1) *e alle condizioni* (4) *nell'ipotesi* (7), *ed è l'unica.*

Chiameremo la $G(x, \xi)$, *la funzione di Green relativa alle condizioni* (4).

Si voglia infine costruire un integrale della (1) soddisfacente alle condizioni (2), supposta sempre verificata la (7). Poichè è supposta verificata la (7) esisterà uno ed un sol polinomio in x di grado $n-1$, soddisfacente alle (2), diciamolo $g(x)$. Allora la funzione $y(x)$ definita dall'eguaglianza:

$$y(x) = g(x) + \int_a^b \varphi(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi ,$$

soddisfa alla (1) e alle (2), ed è l'unica, poichè, supposto che $y(x)$ soddisfi alla (1) e alle (2), la differenza:

$$y(x) - \int_a^b \varphi(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi ,$$

soddisfa all'equazione:

$$y^{(n)} = 0$$

e alle (2), sarà cioè un polinomio di grado $n-1$ soddisfacente alle (2).

§ 2. — *Un sistema di equazioni integrali lineari di Fredholm.*

Dopo il § precedente siamo in grado di dare un criterio per decidere sull'esistenza di un integrale dell'equazione differenziale lineare ordinaria:

$$y^{(n)} = p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y + f(x) , \tag{9}$$

soddisfacente alle condizioni (2) nell'ipotesi (7), supposte le $p_i(x)$ e $f(x)$ finite e continue in (a, b).

Diciamo $g(x)$ il polinomio in x di grado $n-1$, che, nell'ipotesi (7), esiste ed è unico, verificante le (2) e $G(x, \xi)$ la funzione di Green relativa alle condizioni (4). Esista un integrale y della (9) soddisfacente alle (2), allora, pel § precedente si avrà:

$$y(x) = g(x) + \int_a^b [p_1(\xi)\, y^{(n-1)}(\xi) + \cdots + p_n(\xi)\, y(\xi) + f(\xi)]\, G(x, \xi)\, d\xi ,$$

cioè:

$$y(x) - \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^b p_i(\xi)\, y^{(n-i)}(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi = g(x) + \int_a^b f(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi . \tag{10}$$

Abbiamo supposto le $p_i(x)$ e $f(x)$ funzioni finite e continue in (a, b), perciò la y e le sue prime n derivate sono finite e continue in (a, b), e per avere la $G(x, \xi)$ le sue prime $n-2$ derivate finite e continue in (a, b), la (10) avrà di conseguenza le altre $n-2$ equazioni:

$$y'(x) - \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^b p_i(\xi)\, y^{(n-i)}(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} d\xi = g'(x) + \int_a^b f(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} d\xi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-2)}(x) - \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^b p_i(\xi)\, y^{(n-i)}(\xi) \frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} d\xi = $$
$$= g^{(n-2)}(x) + \int_a^b f(\xi) \frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} d\xi .$$

L'ultima equazione, spezzando in due i varî integrali che in essa compaiono, il primo esteso da a a x e il secondo da x a b, e derivando rispetto a x, ha di conseguenza l'altra:

$$y^{(n-1)}(x) - \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^b p_i(\xi)\, y^{(n-i)}(\xi) \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} d\xi = $$
$$= g^{(n-1)}(x) + \int_a^b f(\xi) \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} d\xi .$$

Ne ricaviamo che ogni integrale della (9), soddisfacente alle (2), è soluzione delle n equazioni:

$$y^{(k)}(x) - \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^b p_i(\xi)\, y^{(n-i)}(\xi) \frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k} d\xi = g^{(k)}(x) + \int_a^b f(\xi) \frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k} d\xi$$
$$(k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Poniamo:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} -p_{n-i}(\xi) \dfrac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k} = f_{ki}(x, \xi) \\ g^{(k)}(x) + \displaystyle\int_a^b f(\xi) \frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x} d\xi = \varphi_k(x), \end{cases}$$

e consideriamo il sistema di equazioni integrali lineari nelle funzioni incognite $y_0(x), y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)$:

$$\text{(12)} \qquad y_k(x) + \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_a^b f_{ki}(x, \xi)\, y_i(\xi)\, d\xi = \varphi_k(x) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Se y è un integrale della (9) soddisfacente alle (2), ponendo:

$$y_k = y^{(k)} \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

si ha un sistema di soluzioni delle equazioni (12), come abbiamo visto, e viceversa, se $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ è un sistema di soluzioni delle (12), ponendo:

$$y = y_0,$$

si ha:

$$y^{(k)} = y_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

come subito risulta osservando la forma, che per le (11), hanno le equazioni (12), mentre y soddisfa alla (9) e alle condizioni (2), come risulta, pel § precedente, dalla prima delle equazioni (12).

Ne ricaviamo che: *Il problema della determinazione degli integrali dell'equazione* (9) *soddisfacenti alle* (2), *nell'ipotesi* (7), *è perfettamente equivalente al problema della risoluzione del sistema di equazioni integrali lineari* (12).

Il sistema (12) à appunto un sistema di equazioni integrali lineari di Fredholm. Per cui non resta che a fare l'immediata applicazione dei risultati da Fredholm ottenuti nel già citato suo lavoro, per ottenere i criteri che volevamo.

Consideriamo, insieme all'equazione (9), l'equazione:

$$y^{(n)} = \lambda[p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y] + f(x), \tag{13}$$

contenente il parametro arbitrario λ, di cui considereremo valori reali o complessi. Valendosi dei risultati del Fredholm *si potrà costruire una trascendente intiera* $D(\lambda)$ *i cui zeri*:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots \tag{14}$$

sono quei soli valori di λ *per cui non esisterà un integrale della* (13) *verificante le* (2) *con le* l_i *affatto arbitrarie* [1]. *Per ogni altro valore di* λ *esisterà uno ed un solo integrale soddisfacente, comunque siano le* l_i, *alle* (2). Per cui: *Condizione necessaria e sufficiente perchè la* (9) *ammetta uno ed un solo integrale soddisfacente alle* (2), *supposte le* l_i *affatto arbitrarie, è che sia*:

$$D(1) \neq 0.$$

I valori (14) li potremo chiamare *i valori eccezionali del parametro* λ *relativi all'equazione* (13) *e alle condizioni* (2).

Dai risultati del Fredholm si trae anche che:

Per ogni valore eccezionale λ_ν di λ esistono integrali dell'equazione:

$$y^{(n)} = \lambda[p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y], \tag{15}$$

non identicamente nulli in (a, b), soddisfacenti alle (4), e viceversa, se ciò è possibile, λ è un valore eccezionale.

Nella (15) e nella (13) λ abbia un valore eccezionale λ_ν, supposto che i siano gli integrali linearmente indipendenti dalla (15) verificanti le (4),

[1] Sottintendiamo sempre l'ipotesi (7).

perchè esistano integrali della (13) verificanti la (2), debbono le $l_1, \dots, l_n$ soddisfare a i relazioni lineari, nel lavoro del Fredholm effettivamente costruite, se $l_1, \dots, l_n$, soddisfano a quelle i relazioni, gli integrali della (13) verificanti le (2) dipendono linearmente da i costanti arbitrarie.

Osserveremo, infine, che la teoria precedente può, senz'altro, anche applicarsi all'ottenimento d'un criterio per decidere sull'esistenza di m funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$ soddisfacenti al sistema di equazioni differenziali lineari:

$$(16) \qquad y_i^{(n_i)} = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{l=1}^{l=n_k} p_{ikl}(x)\, y_k^{(n_k-l)} + f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

con le condizioni per la y_i:

$$(17) \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=n_i} \int_a^b a_{i\nu\mu}(\tau)\, y_i^{(\mu-1)}(\tau)\, d\tau = l_{i\nu} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m \\ \nu = 1, 2, \dots, n_i \end{pmatrix}.$$

Detta $G_i(x, \xi)$ la funzione di Green relativa alle condizioni (17) con le $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_{n_i}}$ tutte nulle e $g_i(x)$ il polinomio di grado $n_i - 1$ soddisfacente alle (17), posto:

$$\begin{aligned} -p_{i,k,n_k-l}(\xi) \frac{\partial^j G_i(x, \xi)}{\partial x^j} &= f_{ijkl}(x, \xi) \\ g_i(x) + \int_a^b f_i(x) \frac{\partial^j G_i(x, \xi)}{\partial x^j} d\xi &= \varphi_{ij}(x) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 0, 1, \dots, n_i - 1 \\ k = 1, 2, \dots, m \\ l = 0, 1, \dots, n_k - 1 \end{pmatrix},$$

per ogni sistema di soluzioni del sistema di equazioni integrali lineari nelle $n_1 + n_2 + \dots + n_i$ funzioni incognite $y_{ij}(x)$:

$$(18) \qquad y_{ij}(x) + \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{l=0}^{l=n_k-1} \int_a^b f_{ijkl}(x, \xi)\, y_{kl}(\xi)\, d\xi = \varphi_{ij}(x)$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 0, 1, \dots, n_i - 1 \end{pmatrix},$$

si otterrà un sistema di soluzioni delle (16), ponendo:

$$y_1 = y_{10}, y_2 = y_{20}, \dots, y_n = y_{n0},$$

e viceversa, per ogni sistema di soluzioni delle (16), si otterrà un sistema di soluzioni delle (18), ponendo:

$$y_{ij} = y_i^{(j)}.$$

Anche in questo caso, dunque, si saprà costruire una trascendente intiera $D(\lambda)$ per la quale la condizione:

$$D(1) \neq 0,$$

è necessaria e sufficiente per l'esistenza di uno ed un sol sistema di soluzioni delle (16) soddisfacenti alle (17) con le l_i, affatto arbitrarie e i cui zeri sono i soli valori di λ pei quali esistono soluzioni non identicamente nulle, del sistema:

$$y_i^{(n_i)} = \lambda \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{l=1}^{l=n_k} p_{ikl}(x)\, y_k^{(n_k-l)},$$

soddisfacenti alle (17) con le l_i, tutte nulle.

Meccanica. — *Sulla instabilità dell'equilibrio di un sistema materiale in posizioni non isolate.* Nota del dott. L. Silla, presentata dal Socio V. Cerruti.

1. Consideriamo un sistema S di punti materiali, limitati nella loro mobilità da vincoli indipendenti dal tempo e soggetti a forze date, le quali derivino da una funzione U delle sole coordinate dei punti. Supposto che il sistema comporti due gradi di libertà e che S_0 ne rappresenti una posizione di equilibrio, esprimiamo tutte le coordinate dei punti mediante due variabili reali ed indipendenti q_1 e q_2, scelte in guisa che esse siano nulle in S_0, nella qual posizione si abbia pure $U = 0$. Si sa che la posizione di equilibrio S_0 è stabile se in S_0 la U è massima: è il teorema classico di Lejeune-Dirichlet. Ed è stato anche dimostrato, in numerosi casi particolari, il teorema reciproco del precedente, cioè se in S_0 la U non è massima, S_0 è una posizione di equilibrio instabile di S.

Ma l'instabilità dell'equilibrio può altresì verificarsi ancorchè U sia massima, purchè il massimo di U si avveri non soltanto nella posizione S_0, corrispondente a $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, ma in tutte le posizioni corrispondenti a valori di q_1 e q_2 definiti dall'equazione $U(q_1, q_2) = 0$. In questa Nota io mi propongo di analizzare appunto questo caso [1] assai interessante d'instabilità, esponendone la teoria con un metodo molto semplice, il quale ci permetterà anche di offrire un criterio circa l'andamento della velocità dei punti del sistema col variare del tempo.

2. Sia

$$2T = Aq_1'^2 + 2Bq_1'q_2' + Cq_2'^2$$

la forza viva di S; A, B e C denotino funzioni di q_1 e q_2 finite e continue e derivabili entro il campo al quale si riferiscono i nostri ragionamenti. Le condizioni dinamiche del sistema dato si possono interpretare mediante

[1] Per quanto mi risulta, questo caso è stato segnalato soltanto dal sig. Hamel; Mathem. Annal., t. LVII, pag. 541.