ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1º Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

è necessaria e sufficiente per l'esistenza di uno ed un sol sistema di soluzioni delle (16) soddisfacenti alle (17) con le l_i, affatto arbitrarie e i cui zeri sono i soli valori di λ pei quali esistono soluzioni non identicamente nulle, del sistema:

$$y_i^{(n_i)} = \lambda \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{l=1}^{l=n_k} p_{ikl}(x)\, y_k^{(n_k-l)},$$

soddisfacenti alle (17) con le l_i, tutte nulle.

Meccanica. — *Sulla instabilità dell'equilibrio di un sistema materiale in posizioni non isolate.* Nota del dott. L. SILLA, presentata dal Socio V. CERRUTI.

1. Consideriamo un sistema S di punti materiali, limitati nella loro mobilità da vincoli indipendenti dal tempo e soggetti a forze date, le quali derivino da una funzione U delle sole coordinate dei punti. Supposto che il sistema comporti due gradi di libertà e che S_0 ne rappresenti una posizione di equilibrio, esprimiamo tutte le coordinate dei punti mediante due variabili reali ed indipendenti q_1 e q_2, scelte in guisa che esse siano nulle in S_0, nella qual posizione si abbia pure $U = 0$. Si sa che la posizione di equilibrio S_0 è stabile se in S_0 la U è massima: è il teorema classico di Lejeune-Dirichlet. Ed è stato anche dimostrato, in numerosi casi particolari, il teorema reciproco del precedente, cioè se in S_0 la U non è massima, S_0 è una posizione di equilibrio instabile di S.

Ma l'instabilità dell'equilibrio può altresì verificarsi ancorchè U sia massima, purchè il massimo di U si avveri non soltanto nella posizione S_0, corrispondente a $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, ma in tutte le posizioni corrispondenti a valori di q_1 e q_2 definiti dall'equazione $U(q_1, q_2) = 0$. In questa Nota io mi propongo di analizzare appunto questo caso [1] assai interessante d'instabilità, esponendone la teoria con un metodo molto semplice, il quale ci permetterà anche di offrire un criterio circa l'andamento della velocità dei punti del sistema col variare del tempo.

2. Sia

$$2T = Aq_1'^2 + 2Bq_1'q_2' + Cq_2'^2$$

la forza viva di S; A, B e C denotino funzioni di q_1 e q_2 finite e continue e derivabili entro il campo al quale si riferiscono i nostri ragionamenti. Le condizioni dinamiche del sistema dato si possono interpretare mediante

[1] Per quanto mi risulta, questo caso è stato segnalato soltanto dal sig. Hamel; Mathem. Annal., t. LVII, pag. 541.

il movimento di un punto sopra una superficie il cui elemento lineare sia dato da

$$ds^2 = \mathrm{A}\, dq_1^2 + 2\mathrm{B}\, dq_1 dq_2 + \mathrm{C}\, dq_2^2 .$$

L'equazione $\mathrm{U}(q_1, q_2) = 0$ ci rappresenta allora una curva l situata sulla superficie: noi supporremo che, lungo l, la tangente e la curvatura variino con continuità e che la curvatura sia finita. Ogni punto di l è una posizione di equilibrio pel punto mobile, avendo noi ammesso che U sia massima sulla curva stessa. Ora è sempre possibile di trasformare le coordinate q_1 e q_2 in altre coordinate curvilinee x, y sulla superficie, tali che x ed y siano ortogonali e alla curva l, cioè $\mathrm{U}(q_1, q_2) = 0$, corrisponda la linea $y = 0$. Basterà porre, ad esempio,

$$y = \mathrm{U}(q_1, q_2),$$
$$x = \mathrm{F}(q_1, q_2),$$

dove F sia scelta convenientemente.

Entro una certa striscia σ, di ampiezza finita, e che comprenda nel suo interno la linea $x (y = 0)$, la funzione U è supposta dapertutto negativa, mentre è nulla sulla linea x. Avuto riguardo, pertanto, alle enunciate proprietà della U, questa sarà del tipo

$$\mathrm{U} = -\lambda(y) \,.\, \mu(x, y),$$

dove $\lambda(y)$ è sempre nulla per $y = 0$, cioè su x, ed è sempre positiva fuori della linea x; $\mu(xy)$, sulla x, è nulla o infinita solo in un numero finito di punti, ma fuori di x è sempre positiva. Ammetteremo inoltre che, dentro σ, le funzioni λ e μ siano derivabili e che $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ sia ordinariamente finita. Si tratta di provare che ogni punto della linea x, in particolare il punto $x = 0$, $y = 0$ (ciò che non toglie affatto generalità alla quistione) è una posizione di equilibrio instabile, nel senso che precisiamo qui appresso.

Sia $\mathrm{O}(x = 0, y = 0)$ una posizione di equilibrio d'un punto materiale, e siano x_0, y_0 e x_0', y_0' rispettivamente le coordinate iniziali e le componenti della velocità iniziale del punto, le quali in valore assoluto siano inferiori rispettivamente ad ε e k, essendo ε e k grandezze piccole ad arbitrio. Il punto, soggetto all'azione delle forze, provenienti dalla funzione U, e alle condizioni iniziali specificate, prenderà a muoversi: se per tutti i valori possibili di x_0, y_0 e di x_0', y_0', scelti comunque ad arbitrio, purchè inferiori in valore assoluto ad ε e k, nel moto susseguente del punto avverrà che x, y, in valore assoluto, si conservino sempre inferiori ad η, quantità prefissata piccola a piacere, diremo che O è una posizione di equilibrio stabile. Se, invece, non per tutti, o per nessuno dei suddetti valori di x_0, y_0

e di x'_0, y'_0 si verificherà che le x, y si conservino inferiori ad η, diremo che in O l'equilibrio del punto è instabile.

3. Alla dimostrazione dell'instabilità, nel caso che è qui trattato, gioverà premettere un lemma.

Un punto mobile sulla linea $x (y = 0)$, si trovi inizialmente nell'origine $(x = 0)$ con velocità x'_0 dell'ordine di k, k indicando una quantità piccola a piacere. Sul moto del punto, a partire dall'istante iniziale, facciamo una delle due ipotesi seguenti:

a) sia $x'_0 > 0$ e $x'' > 0$; se x'' è talvolta negativa, risulti sempre il suo valore assoluto inferiore a Mk^2, dove M rappresenta una grandezza finita e positiva [1];

b) sia $x'_0 < 0$ e $x'' < 0$; se però x'' è talvolta positiva, si abbia sempre $x'' < Mk^2$.

Posto che, ad un certo istante, il moto del punto si arresti, detto t_1 il valore del tempo, per $x' = 0$, si tratta di provare che si avrà sempre

$$(1) \qquad |x'_t| > |x'_0| - Mk^2 t,$$

finchè t non supera t_1.

Basterà, evidentemente, limitare la dimostrazione alla ipotesi (*b*).

Intanto, per $t = 0$, la (1) si riduce all'identità $|x'_0| = |x'_0|$. Immaginiamo che la diseguaglianza (1) sia verificata al tempo t, compreso fra 0 e t_1: proveremo che la (1) sarà verificata anche al tempo $t + \tau$, essendo τ positivo, qualunque, tale però che nell'intervallo τ si verifichi una sola delle due condizioni $x'' < 0$, o, se x'' è positiva, $x'' < Mk^2$, e $t + \tau$ non superi t_1.

Se, *ex. g.*, durante il tempo τ, è $x'' < Mk^2$, avremo

$$\int_t^{t+\tau} x'' dt < \int_t^{t+\tau} Mk^2 dt \text{, ossia} < Mk^2 \tau;$$

o, ancora,

$$|x'_{t+\tau} - x'_t| < Mk^2 \tau;$$

donde, poichè per le ipotesi ammesse $x'_{t+\tau}$ e x'_t sono *dello stesso segno*, risulta

$$|x'_{t+\tau}| > |x'_t| - Mk^2 \tau;$$

ossia, a fortiori, per la (1),

$$|x'_{t+\tau}| > |x'_0| - Mk^2 (t + \tau).$$

[1] Nel seguito della presente Nota, M sarà sempre il simbolo di una quantità positiva e finita, fatta astrazione della sua grandezza effettiva.

Se, invece, durante il tempo τ, è $x'' < 0$, sarà

$$|x'_{t+\tau}| > |x'_t|\,;$$

quindi, certamente,

$$|x'_{t+\tau}| > |x'_t| - \mathrm{M}k^2\tau\,;$$

e, a maggior ragione, per la (1),

$$|x'_{t+\tau}| > |x'_0| - \mathrm{M}k^2(t+\tau)\,.$$

Dunque, se la (1) sussiste all' istante t, essa sussiste anche all' istante $t+\tau$. Ma, evidentemente, la (1) è verificata anche per un tempuscolo τ successivo a $t=0$, durante il qual tempuscolo sussista una sola delle condizioni $x'' < 0$ e, se x'' è positivo, $x'' < \mathrm{M}k^2$; si conclude che la disegualianza (1) è vera per tutto l' intervallo di tempo da $t=0$ a $t=t_1$, l'estremo superiore dell' intervallo incluso.

4. Dal lemma precedente discendono alcune conseguenze notevoli.

All' istante t_1, avendosi $x'=0$, risulterà

$$0 > |x'_0| - \mathrm{M}k^2 t_1\,;$$

donde

$$t_1 > \frac{|x'_0|}{\mathrm{M}k^2}\,. \tag{2}$$

Dunque t_1 è dell'ordine $\dfrac{1}{k}$ almeno.

Sia x_1 il valore dell'ascissa curvilinea al tempo t_1; avremo

$$x_1 = \int_0^{t_1} x'\,dt\,;$$

cce

$$|x_1| = \left|\int_0^{t_1} x'\,dt\right| = \int_0^{t_1} |x'|\,dt\,,$$

giacchè x' non cambia mai segno fra $t=0$ e $t=t_1$. Si avrà allora, per la (2),

$$|x_1| > \int_0^{\frac{|x_0'|}{\mathrm{M}k^2}} |x'|\,dt > \int_0^{\frac{|x_0'|}{\mathrm{M}k^2}} (|x'_0| - \mathrm{M}k^2 t)\,dt\,,$$

tenuta ragione che $|x'_0| - \mathrm{M}k^2 t$ è sempre positivo, finchè $t \leq \dfrac{|x'_0|}{\mathrm{M}k^2}$. Segue

$$|x_1| > \frac{|x'_0|\,.\,|x'_0|}{\mathrm{M}k^2} - \mathrm{M}k^2 \left|\frac{t^2}{2}\right|_0^{\frac{|x_0'|}{\mathrm{M}k^2}}\,;$$

o anche

$$|x_1| > \frac{1}{2}\,\frac{|x'_0|^2}{\mathrm{M}k^2} = \text{quantità finita.}$$

Vale a dire che il mobile, prima di arrestarsi, posto che la velocità si annulli, avrà percorso uno spazio finito.

Del resto è facile provare che la velocità del punto, la quale era inizialmente dell'ordine di k, resta dell'ordine di k per un tempo T dell'ordine di $\frac{1}{k}$, ma inferiore a t_1.

Infatti, finchè t è inferiore a t_1, si ha sempre

$$|x'| > |x'_0| - \mathrm{M}k^2 t .$$

Ora l'espressione $|x'_0| - \mathrm{M}k^2 t$ diminuisce col crescere di t: diciamo T il valore del tempo in corrispondenza del quale si ha

$$|x'_0| - \mathrm{M}k^2 \mathrm{T} = \mathrm{M}k ,$$

M prefissata in guisa che $\mathrm{M}k < |x'_0|$. Per questo valore di T è certo $|x'| > \mathrm{M}k$. Ma, dalla eguaglianza precedente si ricava

$$\mathrm{T} = \frac{|x'_0| - \mathrm{M}k}{\mathrm{M}k^2} .$$

Si conclude che T è dell'ordine di $\frac{1}{k}$, ma inferiore a t_1, per la (2). Dunque almeno fino al tempo T la velocità del mobile resta maggiore di $\mathrm{M}k$.

5. Nell'intorno del punto $\mathrm{O}(x=0\,,\,y=0)$ immaginiamo ora di aver limitato un campo C finito, compreso nella striscia σ, e nel quale ammetteremo siano verificate, oltre alle ipotesi già fatte innanzi sulle funzioni $\lambda(y)$ e $\mu(x\,,y)$, le seguenti ancora. La forza viva, essendo ridotta alla forma

$$2\mathrm{T} = ax'^2 + by'^2 ,$$

supporremo a e b funzioni di x e y non nulle, sempre positive, finite, derivabili e con le derivate prime finite. Sia inoltre, per ora, $\mu(0\,,0) \neq 0$, talchè $\mu(x\,,y)$ risulti non nulla in un intorno finito di 0, e ancora sia μ_x non infinita.

Al tempo $t=0$ lanciamo il punto da 0 con velocità x'_0 dell'ordine di k, piccola a piacere; l'equazione $\mathrm{T} - \mathrm{U}\, h$, inizialmente, ci darà $\frac{1}{2}\, ax'^2_0 = h$; ovvero, posto $h = k^2$, sarà

$$\frac{1}{2}(ax'^2 + by'^2) + \lambda(y)\,\mu(xy) = k^2 .$$

Intanto risultano certo x' e y' dell'ordine di k, almeno, giacchè il prodotto $\lambda\mu$ è positivo, per ipotesi. Si ha poi

$$\lambda(y)\,\mu(xy) < k^2 ;\quad \text{donde}\quad \lambda(y) < \frac{k^2}{\mu(xy)} ;$$

o, ancora,

$$|\lambda(y)\,.\,\mu_x| < k^2 \left|\frac{\mu_x}{\mu(x\,,y)}\right|.$$

Ma $\left|\dfrac{\mu_x}{\mu(xy)}\right| = \mathrm{M}$; dunque

$$|\lambda(y)\,.\,\mu_x| < \mathrm{M}k^2. \tag{3}$$

Ciò premesso, o il punto in virtù del movimento che possiede esce dal campo C, e l'instabilità allora è senz'altro provata. O la traiettoria del punto, come vogliamo ammettere, è compresa nel campo C, in cui sussistono le diseguaglianze scritte innanzi; scriviamo allora l'equazione di Lagrange relativa alla variabile x; si ha

$$ax'' + \frac{1}{2}x'^2\frac{\partial a}{\partial x} + x'y'\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{1}{2}y'^2\frac{\partial b}{\partial x} = \lambda(y)\,\mu_x\,;$$

donde

$$x'' = \frac{-\lambda(y)\,\mu_x - \dfrac{1}{2}x'^2\dfrac{\partial a}{\partial x} - x'y'\dfrac{\partial a}{\partial y} - \dfrac{1}{2}y'^2\dfrac{\partial b}{\partial x}}{a}.$$

Segue dunque, stante le ipotesi fatte su a e b e le loro derivate, l'ordine di grandezza riconosciuto per le $x'\,y'$ e la diseguaglianza (3), che

$$|x''| < \mathrm{M}k^2,$$

e, per il lemma, l'instabilità è provata.

6. Togliamo ora la restrizione fatta che sia μ diversa da zero nel punto $(x=0\,,y=0)$ e supponiamo $\mu(0\,,0)=0$ e altrove, in C, sia μ anche infinita sulla linea x. Quanto a μ_x, entro C, sia magari infinita in qualche punto, ma abbia un segno sempre determinato: sia, a cagion d'esempio, $\mu_x < 0$. Allora lanciamo il punto da O con $x'_0 > 0$. Dalla espressione di x'' risulta

$$x'' = \frac{-\lambda(y)\,\mu_x}{a} + \frac{\mathrm{Q}(x'\,,y')}{a}, \tag{4}$$

Q indicando una espressione quadratica omogenea nelle $x'\,,y'$. Ma

$$\left|\frac{\mathrm{Q}(x'\,,y')}{a}\right| < \mathrm{M}k^2,$$

quindi, osservato che il primo termine a secondo membro, in (4), è positivo, si ha

$$|x''| < \frac{-\lambda(y)\,\mu_x}{a} + \mathrm{M}k^2. \tag{5}$$

Ciò posto, o a secondo membro in (4) prevale sempre, finchè x' non si annulla, il primo termine, e allora x'' è positivo e siamo nel caso (a) del lemma. O prevale sempre il secondo termine; ma allora da (5), *a fortiori*, risulta $|x''| < 2\mathrm{M}k^2$ e si applica ancora il caso (a) del lemma. O, infine, prevalgono alternativamente ora l'una ora l'altro e ancora lo stesso lemma dimostra l'instabilità.

Se fosse $\mu_x > 0$, lanceremmo il punto da O con $x'_0 < 0$; in questo caso però il primo termine a secondo membro in (4), sarebbe negativo e alla (4), invece che la (5), converrebbe associare la diseguaglianza

$$|x''| < \left|\frac{-\lambda(y)\,\mu_x}{a}\right| + \mathrm{M}k^2$$

e si ripeterebbe il ragionamento di poco fa, applicando il caso (b) del lemma.

7. Abbiamo supposto finora che il punto $\mathrm{O}(x=0\,,\,y=0)$ fosse situato dentro C, a distanza finita dal contorno di questo campo, contenuto nella striscia σ e nel quale erano verificate certe ipotesi per la funzione $\mu(xy)$ e per la sua derivata μ_x. Ora vogliamo togliere questa restrizione; ma ammetteremo che se O è sul contorno di C, il contorno non faccia parte della linea x, talchè sulla porzione di questa contenuta in C, si ha sempre o $x > 0$ oppure $x < 0$.

La necessità di trattare a parte il caso attuale deriva da ciò, che quando O si trova proprio sul contorno di C, nasce il dubbio che lanciato inizialmente da O il punto mobile, questo attraversi il contorno nelle adiacenze di O e quindi, uscito dal campo entro il quale sussistono le nostre ipotesi, non si possa poi più nulla concludere circa la instabilità in O.

D'altra parte, siccome attualmente, dentro C, la linea x ha sempre lo stesso segno, non possiamo più disporre del segno della velocità iniziale x'_0. Mostreremo tuttavia che il nostro metodo è sempre applicabile; ma gioverà premettere alcune considerazioni generali sulla striscia σ, le quali finora non era stato necessario di esporre.

Ricordiamo che dentro σ il prodotto $\lambda(y)\,\mu(xy)$ è sempre positivo, fuorchè sulla linea $x(y=0)$ in ogni punto della quale è nullo; quindi se poniamo

$$\lambda(y)\,\mu(x\,,y) = y^m\,\mathrm{F}(y)\,\mu(x\,,y)$$

dove m è positivo e $\mathrm{F}(y)$ è positiva, finita e non nulla in tutta σ, compresi i punti della linea x, la funzione $\mu(x\,,y)$ non ammetterà radici reali nella striscia σ, esclusi eventualmente un numero finito di punti della linea x. Dippiù, essendo $\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = -\lambda\mu_y - \lambda_y\mu$ nulla, per $y=0$, è chiaro che dovrà aversi $m > 1$. Io dico ora che se k è sufficientemente piccolo, x ed y non possono essere mai finite entrambe, in una porzione qualsiasi del punto entro σ.

Infatti, dall'equazione delle forze vive

$$\frac{1}{2}(ax'^2 + by'^2) + y^m \mathrm{F}(y)\, \mu(xy) = k^2,$$

si ha sempre

$$(6) \qquad y^m \mathrm{F}(y)\, \mu(xy) < k^2.$$

Ammesso che, ad un certo istante, si abbiano $x = \alpha$, $y = \beta$, con α e β entrambe finite, dovremo avere

$$\beta^m \mathrm{F}(\beta)\, \mu(\alpha\,, \beta) < k^2\,;$$

donde

$$\mu(\alpha\,, \beta) < \frac{k^2}{\beta^m \mathrm{F}(\beta)}\,;$$

ossia

$$\mu(\alpha\,, \beta) < \text{quantità piccola a piacere.}$$

Ciò importa che α e β siano assai prossime alle radici di $\mu(xy)$, contrariamente alle ipotesi fatte su $\mu(xy)$.

Ma, d'altra parte osserviamo che y non può essere mai finita entro σ, finchè k è abbastanza piccola. Invero, se potesse aversi $y = c$, con c finita, sarebbe $\mu(x\,, c)$ finita e quindi si avrebbe

$$c^m < \frac{k^2}{\mathrm{F}(c)\, \mu(x\,, c)}\,,$$

risultato in contradizione con le ipotesi ammesse.

Ebbene proveremo che, disponendo convenientemente di k, la y può essere ridotta in valore assoluto minore di η, piccola a piacere, di guisa che la traiettoria del punto sia contenuta entro una striscia di larghezza inferiore a 2η, la quale comprenda la linea x.

Infatti, poichè prefissato k, ad ogni valore di t corrisponderà una certa y, si potrà sempre determinare, per ciascuna coppia di valori t e y, un numero r, pel quale si abbia

$$|y| = k^{1-r}.$$

Vediamo per quali valori può variare r. Supponiamo dapprima $r > 0$: vanno allora esclusi i valori $r = 1$ e $r > 1$, per i quali risulterebbe y finita. Sia r compresa fra 0 ed 1, e poniamo $r = 1 - \varrho$, con ϱ positivo; avremo

$$|y| = k^{\varrho}\,,$$

e quindi da (6) si ha

$$k^{m\varrho}\, \mathrm{F}(k^{\varrho})\, \mu(x\,, k^{\varrho}) < k^2.$$

Ora, se fosse ϱ piccolo a piacere, per quanto piccolo si scegliesse k, sarebbe sempre $k^{\varrho} = 1 - \omega$, con ω molto piccolo; quindi risulterebbe

$$(1-\omega)^m \, \mathrm{F}(1-\omega)\, \mu(x\,, 1-\omega) < k^2\,;$$

ossia

$$1 - m\omega < \frac{k^2}{\text{quantità finita}}\,,$$

il che non può accadere. Si conclude che possiamo sempre porre $|y| = k^{\varrho}$, con ϱ minore di 1, ma finito, e, in tal caso, si potrà sempre scegliere k tale che si abbia $k^{\varrho} < \eta$, e quindi risulti $|y| < \eta$.

Se fosse $r < 0$, sarebbe sempre possibile, con una scelta conveniente di k, di rendere $k^{1-r} < \eta$ e quindi $|y| < \eta$.

8. Siamo ora in grado di esaurire rapidamente la dimostrazione dell'instabilità in O, per il caso in cui O si trovi sul contorno del campo C.

Ricordiamo che sulla porzione della linea x racchiusa in C, la x ha un segno determinato; pertanto noi lanceremo il punto da O con velocità iniziale $x'_0 > 0$ se dentro C è $x > 0$, e con velocità iniziale $x'_0 < 0$ se è $x < 0$. Siccome μ_x, entro C è infinita solo in qualche punto, ma in tutti i punti della linea x si ha sempre $\lambda(y)\, \mu_x = 0$, noi potremo, se μ_x è continua, disporre di k in guisa che si abbia

$$|\lambda(y)\,.\,\mu_x| < \mathrm{M}k^2$$

entro tutta una striscia che comprenda la linea x e in ogni punto della quale sia $|y| < \eta$. Ma allora, fintantochè il punto si muoverà nella striscia anzidetta, l'equazione di Lagrange relativa alla x, ci darà sempre

$$|x''| < \mathrm{M}k^2,$$

e quindi l'applicazione del lemma proverà, anche nel presente caso, l'instabilità dell'equilibrio in O.