ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 aprile 1908.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla funzione potenziale di un doppio strato ellissoidico.* Nota del Socio G. MORERA.

Consideriamo sull'ellissoide di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

la distribuzione superficiale di densità:

$$h=(-1)^n \cdot 2^{n-1} \cdot n!\, Q\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)\frac{P}{abc},$$

ove $Q(x, y, z)$ rappresenta un polinomio armonico, omogeneo, di grado n e P la perpendicolare calata dal centro sul piano tangente all'ellissoide in (x, y, z).

La funzione potenziale di tale distribuzione ha, come è noto, l'espressione seguente [1]:

$$U=\pi Q\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right)\int_{s_0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)^n}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\,ds,$$

[1] Cfr. la mia Nota, inserita nel vol. XV (S. 5) di questi Rendiconti: *Alcune considerazioni sulle funzioni armoniche ellissoidali* (pp. 669-678), presentata nella seduta del 2 dicembre 1906.

nella quale per s_0 è da porsi lo zero, ovvero la maggior radice dell'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}=1\,,$$

secondochè il punto potenziato è all'interno, ovvero all'esterno dell'ellissoide.

Nella precedente espressione cambiamo a, b, c rispettivamente in $\sqrt{a^2+\varepsilon}$, $\sqrt{b^2+\varepsilon}$, $\sqrt{c^2+\varepsilon}$, poi deriviamo rispetto ad ε e a derivazione compiuta poniamo $\varepsilon=0$.

Si vede agevolmente che così operando si ottiene la funzione potenziale del doppio strato sull'ellissoide avente per momento unitario, misurato nella direzione della *normale esterna*:

$$\mathfrak{M}=(-1)^n\,.\,2^{n-2}\,.\,n!\,Q\left(\frac{x}{a}\,,\frac{y}{b}\,,\frac{z}{c}\right)\frac{1}{abc}\,.$$

Infatti: si osservi che detto δn lo spessore dello strato compreso fra gli ellissoidi omofocali di semiassi: a, b, c ; $\sqrt{a^2+\delta\varepsilon}$, $\sqrt{b^2+\delta\varepsilon}$, $\sqrt{c^2+\delta\varepsilon}$, si ha per $\delta\varepsilon$ infinitesimo:

$$\delta\varepsilon=2P\delta n\,;$$

e che inoltre, poichè i tre rapporti $\frac{x}{\sqrt{a^2+\varepsilon}}$, $\frac{y}{\sqrt{b^2+\varepsilon}}$, $\frac{z}{\sqrt{c^2+\varepsilon}}$ non variano lungo una stessa traiettoria ortogonale agli ellissoidi omofocali, lungo una tal traiettoria $Q\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+\varepsilon}}\,,\frac{y}{\sqrt{b^2+\varepsilon}}\,,\frac{z}{\sqrt{c^2+\varepsilon}}\right)$ rimane costante; come pure non varia l'elemento

$$\frac{P\,dS}{\sqrt{(a^2+\varepsilon)(b^2+\varepsilon)(c^2+\varepsilon)}}$$

quando con dS si intenda l'elemento intercetto sull'ellissoide variabile, da una stessa superficie tubolare di traiettorie ortogonali. Sicchè coll'indicata operazione si viene a formare la funzione potenziale del doppio strato sull'ellissoide di momento

$$\mathfrak{M}=\frac{h\delta n}{\delta\varepsilon}=\frac{h}{2P}\,.$$

Indichiamo brevemente con $[Q]$ l'operazione derivatoria

$$Q\left(a\frac{\partial}{\partial x}\,,\,b\frac{\partial}{\partial y}\,,\,c\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

e con $[Q'_x]$ l'operazione derivatoria analogamente formata col polinomio omogeneo $Q'_x=\frac{\partial Q}{\partial x}$, ecc., e poniamo:

$$\mu=1-\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\,,\quad R(s)=\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}\,.$$

Detta $\frac{W}{2}$ la funzione potenziale del doppio strato ellissoidico anzidetto, si trova all' interno:

$$W_i = \pi \left\{ \frac{1}{a} [Q'_x] \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{b} [Q'_y] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{c} [Q'_z] \frac{\partial}{\partial z} \right\} \int_0^\infty \frac{\mu^n}{R(s)} ds$$
$$- \frac{2\pi}{abc} [Q] \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^n.$$

All'esterno invece, notato che $\frac{\partial s_0}{\partial \varepsilon} = -1$, si ottiene per W_e la stessa espressione privata dell' ultimo termine, ove però all' integrale è da assegnarsi come limite inferiore, non già lo zero, ma la maggior radice s_0 dell'equazione precedentemente scritta.

Ma si ha [1]:

$$[Q] \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^n = (-1)^n . 2^n . n!\, Q\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{c}, \frac{z}{c}\right),$$

dunque l'*espressione*:

$$W = \pi abc \left\{ \frac{1}{a} [Q'_x] \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{b} [Q'_y] \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{c} [Q'_z] \frac{\partial}{\partial z} \right\} \int_{s_0}^\infty \frac{\mu^n}{R(s)} ds$$
$$- (-1)^n . 2^{n-1} . n!\, (\sigma)_0\, Q\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right),$$

ove $(\sigma)_0$ *indica* 4π, *ovvero lo zero, secondochè il punto potenziato è interno, ovvero esterno all'ellissoide, dà la funzione potenziale del doppio strato di momento unitario:*

$$\mathfrak{M} = (-1)^n 2^{n-1} . n!\, Q\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right).$$

In altri termini, detta N_e la normale esterna all'ellissoide eretta sull'elemento dS, si ha:

$$W = \int \mathfrak{M} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e} dS.$$

È facile verificare direttamente che la funzione W sopra determinata ha, oltre alla proprietà evidente

$$W_e - W_i = 4\pi\mathfrak{M}$$

sovra l'ellissoide, anche tutte le altre proprietà caratteristiche della funzione potenziale di doppio strato.

(1) Loc. cit. pag. 675.

Osserviamo che una funzione arbitrariamente data sull'ellissoide si può sempre sviluppare in una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i^{(n)} \, Q_i^{(n)} \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right),$$

ove le $Q_i^{(n)}$ $(i = 0\ 1, 2, \ldots, 2n)$ indicano $2n+1$ polinomî armonici, omogenei, del grado n, fra di loro linearmente indipendenti, e le α delle costanti. Sicchè, valendoci di un tale sviluppo, il risultato ottenuto ci offre il mezzo di trovare la funzione potenziale di un doppio strato ellissoidico di momento unitario qualunque.

Pongasi in particolare, a scopo di verifica: $a = b = c = 1$; l'ellissoide diviene una sfera e la W si converte nella funzione potenziale del doppio strato sferico di momento unitario:

$$\mathfrak{M} = (-1)^n \, 2^{n-1} \, . \, n! \, Q(x, y, z) \, .$$

Si ha allora ovviamente [1], detta r la distanza di (x, y, z) dal centro:

$$W_e = (-1)^n \, n \, \frac{2^{n+1} \, . \, n!}{2n+1} \, \pi \, \frac{Q(x, y, z)}{r^{2n+1}}$$

$$W_i = (-1)^n \, n \, \frac{2^{n+1} \, . \, n!}{2n+1} \, \pi \, Q(x, y, z) - (-1)^n \, 2^{n+1} \, . \, n! \, \pi \, Q(x, y, z) ;$$

sicchè, indicando con φ_n la funzione sferica dell' n^{mo} ordine corrispondente al polinomio armonico

$$(-1)^n \, 2^{n-1} \, . \, n! \, Q(x, y, z) ,$$

si ha:

$$W_e = \frac{4\pi n}{2n+1} \, \frac{\varphi_n}{r^{n+1}} ,$$

$$W_i = - \frac{4\pi(n+1)}{2n+1} \, \varphi_n \, r^n .$$

Con queste formule si verifica immediatamente che W soddisfa all'interno e all'esterno all'equazione di Laplace ed ha le derivate normali continue attraverso alla sfera; sicchè essa è effettivamente la funzione potenziale del doppio strato sferico di momento φ_n.

Meccanica — *Sugli spostamenti elastici discontinui.* Nota del Corrispondente GIAN ANTONIO MAGGI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Cfr. loc. cit., pag. 678.