ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Chimica. — *Azione del bromo e dell' ipobromito sodico sopra la metanitroanilina e sopra alcune metanitroaniline alogeno-sostituite.* Nota del Socio G. Körner e del dott. A. Contardi.

Chimica — *Sopra una trasformazione del dimetilpirrolo.* Nota del Corrispondente A. Angeli e G. Marchetti.

Mineralogia. — *Appunti su minerali italiani.* I. *La baritina di Boccheggiano in provincia di Grosseto.* Nota del Corrispondente C. Viola.

Geologia. — *Di alcuni carreggiamenti locali recentemente supposti in Italia.* Nota del Socio Carlo de Stefani.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les nouveaux nombres de M. Pascal.* Nota di M. Fujiwara (à Berlin), presentata dal Corrisp. Pascal.

Stern [1] a traité des nombres eulériens E_{2n} et des nombres tangentiels β_{2n+1}, qui sont définis par les relations:

$$\sec z = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{tang} z = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

et a trouvé que:

$$E_0 = 1 \ , \ E_{4n} \equiv 5 \ , \ E_{4n+2} \equiv 1 \quad (\text{mod. } 60)$$

$$\beta_1 = 1 \ , \ \beta_{4n+1} \equiv 6 \ , \ \beta_{4n-1} \equiv 2 \quad (\text{mod. } 10)$$

et:

$$\text{(I)} \qquad \left.\begin{aligned} E_{4n} &\equiv 5 + 380\,(n-1) \\ E_{4n+2} &\equiv 61 + 460\,(n-1) \end{aligned}\right\} \ (\text{mod. } 1000).$$

Récemment M. E. Pascal [2] a introduit pour la première fois les nombres pseudo-eulériens E'_{2n} et les nombres pseudo-tangentiels β'_{2n+1}, qui sont

[1] Journal de Crelle, t. 79, 88.

[2] Rend. Ist. Lombardo, (2), t. XL (1907); Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t. XXIII (1907).

définis par:

$$\frac{1}{2\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty} E'_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\frac{\sinh z}{2-\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta'_{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

et a donné les formules suivantes:

$$\text{(II)} \quad \left.\begin{array}{ll} E'_{4n} \equiv 7, & E'_{4n+2} \equiv 1 + 20n \\ \beta'_{4n+1} \equiv 46 & \\ \beta'_{4n-1} \equiv 4 + 10(60n - 1) & (n \text{ impair}) \\ \quad\;\; \equiv 4 + 10(n-1) & (n \text{ pair}) \end{array}\right\} \pmod{100}$$

Je me permets, dans les lignes suivants, de donner quelque autre formule sur les mêmes nombres.

On sait que, $\dfrac{d^{2n}\,\mathrm{cn}\,z}{dz^{2n}}$ peut s'écrire sous la forme:

$$\mathrm{cn}\,z\,(a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\,\mathrm{cn}^2 z + a_2^{(n)}\,\mathrm{cn}^4 z + \cdots + a_n^{(n)}\,\mathrm{cn}^{2n} z),$$

où $a_m^{(k)}$ sont indépendants de z. Par la différentiation deux fois, on a la formule récurrente, en désignant par k la module de la fonction élliptique $\mathrm{cn}\,z$:

$$a_r^{(n+1)} = (1-k^2)(2r+2)(2r+3)\,a_{r+1}^{(n)} + \\ + (2k^2-1)(2r+1)^2\,a_r^{(n)} - 2r(2r-1)\,k^2\,a_{r-1}^{(n)}$$

où $a_m^{(i)} = 0$ pour $m < 0$, où pour $m > i$.

De cette formule on obtient immédiatement:

$$a_n^{(n)} = (-1)^n\,(2n)!\,k^{2n},$$

et de plus par l'induction successive:

$$a_n^{(n+i)} \equiv 0 \pmod{(2n)!\,k^{2n}}.$$

Donc, en posant:

$$\mathrm{cn}\,z = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

on a:

$$A_{2n} = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} + \cdots + a_n^{(n)} \equiv a_0^{(n)} + a_1^{(n)} + \cdots + a_{\lambda-1}^{(n)} \pmod{(2\lambda)!\,k^{2\lambda}}$$
$$(\lambda \leq n)$$

Or, dans le cas $k=1$, la fonction $\operatorname{cn} z$ devient $\sec(iz)$ et A_{2n} devient $(-1)^n E_{2n}$; donc si $b_i^{(n)}$ est la valeur de $a_i^{(n)}$ pour $k=1$, on a:

$$b_r^{(n+1)} = (2r+1)^2 b_r^{(n)} - 2r(2r-1) b_{r-1}^{(n)},$$

et si nous prenons, pour simplicité, $\lambda = 3$, nous avons:

$$(-1)^n E_{2n} \equiv b_0^{(n)} + b_1^{(n)} + b_2^{(n)} \pmod{6!}.$$

Par conséquence, on a successivement:

$$b_0^{(n)} = 1,$$

$$b_1^{(n)} = -2(1+3^2+3^4+\cdots+3^{2(n-1)}),$$

$$b_2^{(n)} = -12(b_1^{(n-1)} + 5^2 . b_1^{(n-2)} + 5^4 . b_1^{(n-3)} + \cdots + 5^{2(n-3)} . b_1^{(2)}) + 24 . 5^{2(n-2)},$$

et de plus, au moyen de:

$$3^{2+4k} \equiv 3^2, \quad 3^{4k} \equiv 3^4, \quad 24.5^{2k} \equiv 600, \quad 240.5^{2k} \equiv 240 \pmod{6!}$$

on aura:

$$\left.\begin{aligned} b_1^{(2m)} &\equiv -2(10+9(m-1)) \\ b_1^{(2m+1)} &\equiv -2(1+90m) \\ b_2^{(2m)} &\equiv 24+120(m-1) \\ b_2^{(2m+1)} &\equiv 120m, \end{aligned}\right\} \pmod{6!}$$

et enfin:

$$\text{(III)} \qquad E_0 = 1, \quad \left.\begin{aligned} E_{4n} &\equiv 5-60(n-1) \\ E_{4n+2} &\equiv 1+60n. \end{aligned}\right\} \pmod{6!}$$

De la relation

$$\beta_{2n-1} = \binom{2n-1}{1} E_{2n-2} - \binom{2n-1}{3} E_{2n-4} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \binom{2n-1}{2n-3} E_2 - (-1)^n,$$

et au moyen des relations:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{4n+1}{4k+1} = 2^{4n-1} + (-1)^n\, 2^{2n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{4n+1}{4k-1} = 2^{4n-1} - (-1)^n\, 2^{2n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{4n+1}{4k+1} = (4n+1)\,(2^{4n-4} + (-1)^n\, 2^{2n-3}) - (2^{4n-3} + (-1)^n\, 2^{2n-3})$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{4n+1}{4k-1} = (4n+1)\,(2^{4n-4} - (-1)^n\, 2^{2n-3}) + (2^{4n-3} - (-1)^n\, 2^{2n-3})$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n-1}{4k+1} = 2^{4n-3} - (-1)^n\, 2^{2n-2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{4n-1}{4k-1} = 2^{4n-3} + (-1)\, 2^{2n-2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{4n-1}{4k+1} = 2^{4n-6}(4n-1) - (2^{4n-5} - (-1)^n\, 2^{2n-4})$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{4n-1}{4k-1} = 2^{4n-6}\,(4n-1) + (2^{4n-5} + (-1)^n\, 2^{2n-4})$$

$$\left.\begin{aligned} 2^{4m} &\equiv 16 + 240(m-1) \\ 2^{4m+1} &\equiv 32 + 480(m-1) \\ 2^{4m+2} &\equiv 64 + 240(m-1) \\ 2^{4m+3} &\equiv 128 + 480(m-1) \end{aligned}\right\} \pmod{6!}$$

on peut trouver les résultats suivants:

$$\text{(IV)} \qquad \beta_1 = 1\,, \qquad \left.\begin{aligned} \beta_{4n+1} &\equiv 16 \\ \beta_{4n-1} &\equiv 272 \end{aligned}\right\} \pmod{6!}$$

Ces résultats peuvent être obtenus aussi de la relation:

$$\frac{d^{2n+1}\, sn\, z}{dz^{2n+1}} = cn\, z\, dn\, z(c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\, cn^2 z + c_2^{(n)}\, cn^4 z + \cdots + c_n^{(n)}\, cn^{2n} z)$$

et de $sn\, z = -\, i \operatorname{tang}(iz)$ pour $k = 1$.

De même point de vue, nous pouvons, par les relations:

$$E'_{2n} = \binom{2n}{2} E'_{2n-2} + \binom{2n}{4} E'_{2n-4} + \cdots + \binom{2n}{2n\_4} E'_2 + 1\,,$$

$$\beta'_{2n-1} = \binom{2n-1}{1} E'_{2n-2} + \binom{2n-1}{3} E'_{2n-4} + \cdots + \binom{2n-1}{2n-3} E'_2 + 1\,,$$

deduire:

$$\text{(V)}\quad \left.\begin{array}{r} E'_0 = E'_2 = 1\,,\ E'_{4n} \equiv 7 + 300(n-1) \\ E'_{4n+2} \equiv 121 + 300(n-1) \\ \beta'_1 = 1\,,\ \beta'_3 = 4\,,\ \beta'_{4n+1} \equiv 46 + 120(n-1) \\ \beta'_{4n-1} \equiv 34 + 120(n+1) \end{array}\right\} \text{(mod. 6!)}$$

Joignant les formules (I) et (III), on a

$$\text{(VI)}\quad \left.\begin{array}{r} E_{4n+2} \equiv 3601 + 14460n \\ E_{4n} \equiv 16625 + 1380n \end{array}\right\} \text{(mod. 18000)}$$

et de (II) et (V):

$$\text{(VII)}\quad \left.\begin{array}{r} E'_{4n} \equiv 7 + 300(n-1) \\ E'_{4n+2} \equiv 121 + 1020(n-1) \\ \beta'_{4n+1} \equiv 46 + 3000(n-1) \\ \beta'_{4n-1} \equiv 34 + 1560(n+1) \end{array}\right\} \text{(mod. 3600).}$$

Astronomia. — *Il pianeta (472) Roma.* Nota di GIOVANNI ZAPPA, presentata dal Socio ELIA MILLOSEVICH.

Il pianeta 1901 GP, poi (472) Roma, fu scoperto a Koenigstuhl dal dottor Carnera l'11 luglio 1901 mediante la fotografia; apparve allora di 11.8 e fra 11.6 e 12.0 si mantenne nei cinquantatrè giorni di osservazione: venne subito seguìto a Bordeaux, ad Arcetri e più lungamente a Roma, con un totale di ventiquattro posizioni.

Sulle tre osservazioni di Roma del 18 luglio, del 25 luglio e del 9 Agosto basò un'orbita il Dr. H. Paetsch giungendo ai seguenti elementi:

$$\begin{array}{l} \Omega = 127^\circ\ 4'\ 30''.2 \\ \iota = 15^\circ\ 37'\ 46''.1 \\ \omega = 288^\circ\ 20'\ 40''.3 \\ \varphi = 5^\circ\ 54'\ 20''.5 \\ \mu = 871''\ 928 \\ M = 255^\circ\ 42'\ 27''.4 \end{array}$$

Epoca 1901 Agosto 9.5 T. M. Berlino
Equinozio 1901.0

Da essi, tenuto conto delle perturbazioni dalla prima alla seconda opposizione, P. Neugebauer, allora a Breslavia, dedusse un'effemeride (vedi Veröff, Rechen-Instituts N. 18), però solo in terza opposizione nel 1904 il pianeta