ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Astronomia. — *Orbita ellittica di (521) Brixia in base alle prime 4 opposizioni.* Nota di EMILIO BIANCHI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica-matematica. — *Sull'isteresi magnetica.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Corrispondente LEVI-CIVITA.

Nello studio di alcuni fenomeni naturali, la legge della proporzionalità tra causa ed effetto (legge di Hooke pei fenomeni elastici) risponde abbastanza bene alle circostanze di fatto in prima approssimazione, se ci si limita cioè a considerare soltanto l'aspetto preponderante del fenomeno.

Non è così per ciò che riguarda la magnetizzazione del ferro e degli altri metalli in generale.

Si sa che il magnetismo indotto in un corpo *perfettamente dolce* dovrebbe essere proporzionale alla forza magnetizzante.

Parrebbe quindi che i corpi *più dolci* non dovessero scostarsi di molto da tale legge. Invece i fenomeni d'isteresi mettono quotidianamente in evidenza, che essa non è ammissibile neppure in un campo piccolo di approssimazione [1].

Vi è adunque una legge più complessa che presiede al fenomeno di magnetizzazione dei corpi.

Quale?

L'idea che si presenta più spontanea (e certamente la più generale) è di ritenere che lo stato attuale di magnetizzazione del corpo, non solo dipenda dal valore raggiunto dalla corrispondente forza magnetizzante, ma sia funzione addirittura di tutti gli stati antecedenti.

L'intuizione fisica ci induce poi ovviamente ad ammettere, che l'influenza degli stati antecedenti si rende tanto meno sensibile quanto più sono lontani dall'attuale.

Ma la questione posta sotto questo punto di vista si presenta di una arbitrarietà assai grande, e senza introdurre delle ipotesi particolari, difficilmente si arriva a qualche risultato concreto.

[1] Veramente secondo Lord Rayleigh non vi è isteresi quando la forza magnetizzante è compresa tra 0,00004 e 0,04 in unità C. G. S. [Cfr. Phil. Mag., 5ª serie, t. XXIII; 1887, pag. 225]. Basterà però notare che nelle applicazioni la forza agente è sempre superiore a 0,04.

Nel presente lavoro, appoggiandomi appunto a ipotesi particolari, plausibili almeno in prima approssimazione, mi sono proposto di pervenire a qualche risultato di facile controllo sperimentale.

I due elementi (causa ed effetto) che definiscono uno stato del corpo (forza magnetizzante e magnetismo indotto nei fenomeni di magnetizzazione), dipendono, in generale con legge diversa, dal tempo.

Immaginiamo ora che il modo con cui avviene la successione degli stati abbia raggiunto un carattere periodico di stabilità (stato di regime). In tali condizioni, tanto la causa quanto l'effetto dipendono periodicamente (e con egual periodo) dal tempo. Si può ritenere allora che l'elemento tempo non influisca direttamente a definire uno stato del corpo, ma che questo risulti completamente individuato dal valore o della sola causa o del solo effetto. In particolare la conoscenza dei limiti di variabilità dell'uno, caratterizza la successione dei valori dell'altro, talchè in un piano rappresentativo, rimane univocamente determinata una curva chiusa che corrisponde agli stati periodicamente assunti dal fenomeno, cioè, come si suol dire, *un ciclo d'isteresi* (1).

In tal modo si viene a definire un sistema doppiamente infinito di cicli (caratterizzati dai limiti di variabilità di uno degli elementi, causa od effetto); semplicemente infinito se si tratta di cicli simmetrici.

Limitando il mio studio ai cicli simmetrici introduco due ipotesi.

La prima è del *Duhem* (2).

Essa fa dipendere lo studio dei cicli da un'equazione differenziale di primo ordine, suscettibile di due determinazioni distinte. Le due curve integrali passanti per un punto generico costituiscono complessivamente i cicli. In questa equazione differenziale compare una funzione dagli elementi che definiscono un generico stato; funzione che il *Duhem* lascia indeterminata.

La seconda ipotesi mira a togliere questa indeterminatezza.

Viene in essa ammesso che nella variazione degli stati preponderi l'influenza di uno degli elementi (effetto) sull'altro (causa). Nei fenomeni di magnetizzazione infatti basta una piccola variazione della forza magnetizzante, per avere una notevole variazione del magnetismo indotto.

Con queste ipotesi mi propongo di determinare tutti gli elementi del sistema di cicli simmetrici di un corpo, mediante la curva

$$F = \Psi(r),$$

nella quale F = *forza coercitiva* e r = *magnetismo residuo*, (vedi figura)

(1) Vedi Warburg, *L'hystérésis.* [Rapports présentés au Congrès international de Physique. Paris 1900, t. II], pag. 512.

(2) *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis.* [Mémoires de l'Académie royale de la Belgique, tome LIV, pag. 52-53].

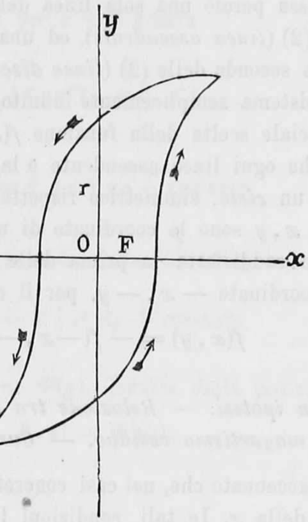
Tale curva, per ciascun corpo, si determina sperimentalmente. Si può però, con sufficiente approssimazione, assimilarla ad un'iperbole di equazione

$$F = \frac{br}{a + r}\,;$$

dimodochè basta per ogni corpo valutare le due costanti a, b.

Siamo allora, in particolare, in grado di costruire tutti i cicli simmetrici corrispondenti ai valori della forza coercitiva, tali che (cfr. § 4)

$$\frac{1}{3}\,b \leq F \leq \frac{1}{2}\,b\,.$$



Insomma si può dire che le proprietà magnetiche del corpo sono definite dalle due costanti a, b.

In una prossima Nota mi propongo di applicare i risultati generali cui sono pervenuto in questa ricerca ad alcuni esempi.

1. *Ipotesi fondamentale. — Cicli simmetrici.*

Chiamo x la forza magnetizzante e y il magnetismo indotto.

Poniamo

(1) $$dx = k\,dy + f(x\,,y)\,|dy|\,,$$

dove k è una costante, e $f(x\,,y)$ una funzione, a priori arbitraria, degli argomenti x e y. Se il corpo fosse *perfettamente dolce* dovrebb'essere $f = 0$. In tal caso la (1) rappresenta, nel piano delle variabili $x\,,y$, un sistema di rette. Se si ammette invece che la $f(x\,,y)$ non sia identicamente nulla, la (1) mette già in evidenza i caratteri qualitativi dell'isteresi.

Infatti dalla (1), notando che se dy è *positivo* si ha $|dy| = dy$; mentre se dy è *negativo* si ha $|dy| = -dy$, si deducono le due relazioni differenziali

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = k + f(x, y), \\ \dfrac{dx}{dy} = k - f(x, y). \end{cases}$$

Ora ciascuna di queste equazioni definisce nel piano (xy) (o più precisamente in un campo convenientemente limitato) una congruenza di linee. Per ogni punto passa perciò una sola linea della congruenza rappresentata dalla prima delle (2) (*linea ascendente*), ed una sola linea della congruenza rappresentata dalla seconda delle (2) (*linea discendente*). La (1) può adunque rappresentare un sistema semplicemente infinito di fenomeni d'isteresi, caratterizzato dalla speciale scelta della funzione $f(x, y)$.

Supporremo che ogni linea ascendente e la corrispondente linea discendente determinino un *ciclo*, simmetrico rispetto all'origine delle coordinate. Manifestamente se x, y sono le coordinate di un punto della curva ascendente, cioè rendono soddisfatta la prima delle (2), la seconda dovrà essere soddisfatta dalle coordinate $-x, -y$, per il che è necessario e basta che

$$(3) \qquad f(x, y) = -f(-x, -y).$$

2. *Seconda ipotesi. — Relazione tra la forza coercitiva ed il magnetismo residuo. — Curva dei vertici.*

Abbiamo già accennato che, nei casi concreti, i valori della y sono molto superiori a quelli della x. In tali condizioni l'ipotesi che si presenta più ovvia sarebbe di trascurare addirittura la x di fronte ad y, di ritenere cioè la f funzione della sola y.

Ma si riconosce facilmente che questa via è troppo grossolana, e non rappresenta in modo soddisfacente le circostanze di fatto. Conviene dunque passare ad una approssimazione ulteriore e tener conto anche del termine lineare in x, ponendo $f(x, y) = Ax + B$, con A e B funzioni della sola y. Dacchè la f deve annullarsi per $x = y = 0$, è $B(o) = 0$. di qua siamo tratti a presumere che (almeno in prima approssimazione) si possa ritenere B identicamente nullo.

Ciò posto, sia

$$(4) \qquad f(x, y) = x \cdot \varphi',$$

designando φ' una funzione di y, a priori indeterminata, e che potremo riguardare come la derivata di una funzione φ. È facile verificare che la (4) soddisfa alla condizione (3), purchè soltanto sia φ' funzione *pari*. Potremo così ritenere φ funzione *dispari*.

Le (2), per la (4), divengono

$$(2') \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = k + x \,.\, \varphi', \\[2mm] \dfrac{dx}{dy} = k - x \,.\, \varphi'. \end{cases}$$

Dalla prima di queste, che può anche essere scritta

$$\frac{dx}{dy} - x \,.\, \varphi' = k,$$

moltiplicando ambo i membri per $e^{-\varphi}$, si ricava

$$\frac{d}{dy} \{ x \,.\, e^{-\varphi} \} = k \,.\, e^{-\varphi},$$

da cui integrando

$$(2'') \qquad x \,.\, e^{-\varphi} = k \int e^{-\varphi} \, dy + \text{costante}.$$

In modo analogo, dalla seconda delle (2') integrando si ottiene

$$(2''') \qquad x \,.\, e^{\varphi} = k \int e^{\varphi} \, dy + \text{costante}.$$

Introduciamo una funzione $\Psi(y)$, definita dalla posizione

$$(5) \qquad k \,.\, e^{\varphi} = \Psi'(y),$$

e dalla determinazione $\Psi(o) = 0$.

Essendo $\varphi(o) = 0$, sarà

$$\Psi'(o) = k.$$

Ricordando che $\varphi(y) = -\varphi(-y)$, dalla (5) deriva la relazione funzionale

$$(6) \qquad \Psi'(y) \,.\, \Psi'(-y) = k^2.$$

Portando nelle (2'') e (2''') la posizione (5) e tenendo conto della (6), avremo le equazioni dei due rami, ascendente e discendente del ciclo, sotto la forma

$$(7) \qquad \begin{cases} kx = \Psi(y) \, [\mathrm{F} - \Psi(-y)], \\ kx = \Psi(-y) \, [\Psi(y) - \mathrm{F}], \end{cases}$$

avendo chiamato F e — F le costanti di integrazione che, come si può facilmente vedere, devono per la simmetria del ciclo, essere eguali ed opposte. Si può immediatamente ricavare il significato della costante F.

Ponendo nelle (7) $y = 0$, e tenendo presente che $\Psi'(o) = k$ e $\Psi(o) = 0$, si ricava

$$x = \mathrm{F} \quad , \quad x = -\mathrm{F} ,$$

rispettivamente. Da queste appare che F rappresenta la *forza coercitiva*.

Dalle (7) stesse si può dedurre il significato della funzione Ψ. Chiamando r il *magnetismo residuo* e notando che esso è dato dal valore assoluto dell'ordinata del punto d'incontro di uno qualunque dei due rami del ciclo coll'asse y, avremo p. es. dalla seconda delle (7) ponendo $x = 0$ e $y = r$,

(8) $$\mathrm{F} = \Psi(r) .$$

Ad ogni valore di F corrisponde un determinato ciclo simmetrico, rispetto all'origine delle coordinate; quello rappresentato dalle equazioni (7), nelle quali a F si attribuisce quel particolare valore.

Le coordinate dei punti comuni di due rami di un ciclo (*vertici del ciclo*) si otterranno risolvendo le (7) rispetto a x e y.

Anzi la eliminazione del parametro F dalle (7) stesse ci darà il luogo geometrico dei vertici dei cicli di un dato sistema.

Tenendo presente la (6), si perviene alla relazione

$$x = k \frac{\Psi(y) - \Psi(-y)}{\Psi'(y) + \Psi'(-y)} .$$

Questa è adunque l'equazione della *curva dei vertici*.

3. *Le funzioni* $\Psi(y)$, $\Psi(-y)$ *e le loro derivate.*

Abbiamo visto nel numero precedente come, mediante le funzioni $\Psi(y)$, $\Psi(-y)$ e le loro derivate, rimangono definiti tutti i cicli simmetrici d'isteresi magnetica di un dato corpo. Nota la $\Psi(y)$ per valori positivi dell'argomento, per mezzo della (6) si può determinare la $\Psi'(-y)$ e quindi per integrazione la $\Psi(-y)$. La (8) indica la via da tenersi per avere la Ψ per valori positivi dell'argomento.

Basta a tal uopo costruire, pel corpo che si considera, la curva (8), ricavandola per via puramente sperimentale. Pel ferro dolce, e con molta probabilità anche per gli altri metalli, tale curva si può ritenere, con sufficiente approssimazione, una iperbole di equazione

(9) $$\mathrm{F} = \frac{br}{a + r} ,$$

nella quale a e b designano due costanti positive.

Avremo allora per la (8)

$$(10) \qquad \begin{cases} \Psi(y) = \dfrac{by}{a+y}, \\ \Psi'(y) = \dfrac{ab}{(a+y)^2}. \end{cases}$$

Da quest'ultima, ponendo $y=0$, si ha $\Psi'(o) = \dfrac{b}{a}$, e quindi ricordando che $\Psi'(o) = k$,

$$(11) \qquad k = \frac{b}{a}.$$

Dalla seconda delle (10), per le (6) e (11), avremo ancora

$$(12) \qquad \Psi'(-y) = \frac{b}{a^3}(a+y)^2.$$

Da questa integrando si ha

$$\Psi(-y) = -\frac{b}{3a^3}(a+y)^3 + \text{costante}.$$

Valutando la costante in modo che sia $\Psi(o) = 0$, si perviene in definitiva alla relazione

$$(13) \qquad \Psi(-y) = -\frac{b}{3a^3}\{(a+y)^3 - a^3\}.$$

Portando nelle (7) le espressioni (10), (11), (12) e (13), avremo per $y>0$ le equazioni del ramo ascendente e del ramo discendente del ciclo sotto la forma

$$(14) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^3.[3F-b] + b.[a+y]^3}{3a[a+y]^2}, \\ x = \dfrac{1}{a^2}[by(a+y) - F.(a+y)^2]. \end{cases}$$

La prima rappresenta una curva del terzo ordine; la seconda una parabola.

4. *Discussione. — Limiti di validità dei risultati ottenuti.*

Vediamo sotto quali condizioni le (14) rispecchiano l'andamento qualitativo caratteristico dei cicli d'isteresi. Basterà considerare solamente i semicicli contenuti p. es. nel semipiano delle ordinate positive, avendo i rimanenti semicicli, andamento simmetrico ai primi rispetto all'origine delle coordinate.

In ciascuno dei rami (ascendente e discendente) di un generico ciclo, per $y>0$ l'ascissa x dev'essere funzione crescente, si deve cioè avere $\dfrac{dx}{dy} > 0$

Inoltre il ramo ascendente deve, per $y > 0$ volgere la sua convessità verso l'asse delle ordinate, il che implica che $\frac{d^2x}{dy^2} > 0$. Anche sul ramo discendente dev'essere, per $y > 0$, $\frac{d^2x}{dy^2} > 0$.

Dalle (14), derivando si ha

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{b}{3a} - \frac{2}{3}\frac{a^2(3F - b)}{(a+y)^3}, \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{(b - 2F)(a+y) + by}{a^2}; \end{aligned} \right.$$

le quali per $y = 0$ dànno entrambe

$$(16)\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{b - 2F}{a}.$$

Derivando ancora le (15) otteniamo

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2a^2}{(a+y)^4} \{3F - b\},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2}{a^2} \{b - F\}.$$

Da queste e dalla (16) si deduce: affinchè, per $y > 0$, i due rami del ciclo si comportino nel modo voluto, cioè affinchè su ciascun ramo sia $\frac{dx}{dy} > 0$ e $\frac{d^2x}{dy^2} > 0$ è necessario e basta che la forza coercitiva F soddisfaccia alla seguente limitazione

$$(17)\qquad \frac{1}{3}b \leq F \leq \frac{1}{2}b.$$

Chimica. — *Ancora su un nuovo concetto di elemento (risposta ad una possibile obbiezione)*. Nota di ALDO MIELI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Un'obbiezione che molto facilmente può farsi alla definizione che io ho dato di elemento secondo il nuovo concetto da me introdotto [1], obbiezione che a prima vista sembra possa esser giusta e che quindi fa colpo, è quella che si ottiene facendo il ragionamento seguente:

Supponiamo di avere una sostanza Z che in un dato campo possa scomporsi nelle quattro sostanze M, N, P, Q; supponiamo inoltre che esistano i composti

$$A = MN\ ;\ B = PQ\ ;\ A' = MP\ ;\ B' = NQ.$$

[1] Vedi Rend. Acc. dei Lincei, vol. XVII, 1° sem. (1908), pag. 374; Rivista scientifico-industriale, vol. 39 (1907), pag. 133.