ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

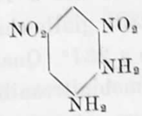
ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

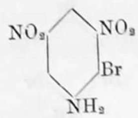
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

il Nitzki e Hagenbach (¹) dimostrarono appartenere la formula di struttura:



Perciò alla binitrobromoanilina pf. 181°, si dovrà assegnare la formula:



Tutti i tentativi fatti per ottenere da questa ultima sostanza un prodotto bibromurato, condussero sempre invece alla già nota tribromobinitroanilina, mentre rimaneva una parte della sostanza non alterata.

Matematica. — *Su certe classi di equazioni di Riccati integrabili con una sola quadratura quando ne sia conosciuto un solo integrale particolare.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

È ben noto che se di una equazione generale di Riccati

$$y' = \mathrm{P}y^2 + \mathrm{Q}y + \mathrm{R} \tag{1}$$

(in cui P, Q, R sieno funzioni di sola x) è conosciuto un integrale particolare, quella equazione si riduce subito ad una lineare, e quindi è integrabile mediante *due* quadrature.

La breve Nota che segue contiene una semplice osservazione sulla costruzione di certe classi di equazioni di Riccati delle quali, conosciuto un integrale particolare, si può con una sola quadratura conoscere l'integrale generale.

In queste classi rientra una equazione considerata da me alcuni anni fa [1], che contiene poi a sua volta, come casi particolari, una equazione considerata da Malmstén e Brioschi. un'altra considerata da Siacci, e finalmente l'antica classica equazione considerata per la prima volta da Jacopo Francesco Riccati.

Colla nostra osservazione restano anche determinate delle classi di equazioni differenziali lineari di 2° ordine delle quali è calcolabile l'integrale generale quando ne sia conosciuto un solo integrale particolare.

(¹) Rend. Accad. di Napoli, 1903.

Si sa che la (1) può, con una trasformazione della variabile y, mutarsi nel tipo

$$z' + z^2 = f(x)\,; \tag{2}$$

basta per ciò porre

$$y = -\frac{z}{P} - \frac{Q}{2P} + \frac{P'}{2P^2}\,, \tag{3}$$

indicando con P′ la derivata di P.

D'altra parte la (2) è la trasformata di

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)\,.\,u \tag{4}$$

colla trasformazione

$$z = \frac{u'}{u}\,. \tag{5}$$

Ora osserviamo che vi sono alcune facili trasformazioni delle due variabili x ed u, colle quali l'equazione lineare di 2° ordine (4) resta inalterata di forma; p. es. la trasformazione

$$u = \frac{v}{t}\,,\quad x = \frac{1}{t}\,. \tag{6}$$

Giacchè da

$$\frac{du}{dx} = -t\frac{dv}{dt} + v$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \quad t^3\frac{d^2v}{dt^2}$$

risulta che la (4) si trasforma in

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{1}{t^4}\,f\left(\frac{1}{t}\right)v\,. \tag{7}$$

Se quindi determiniamo una funzione f di una variabile t e di un certo numero di costanti $a\,,b\,,\ldots$ avente la proprietà

$$\frac{1}{t^4}\,f\left(\frac{1}{t}\,,a'\,,b'\,,\ldots\right) = f(t\,,a\,,b\,,\ldots)$$

cioè

$$\frac{1}{t^2}\,f\left(\frac{1}{t}\,,a'\,,b'\,,\ldots\right) = t^2 f(t\,,a\,,b\,,\ldots)$$

le $a'\,,b'\,,\ldots$ essendo legate alle $a\,,b\,,\ldots$ da certe relazioni, indipendenti naturalmente da t, la (7) sarà in $v\,,t$, della stessa forma della (4), e perciò, conosciuto un integrale particolare di (4), esso medesimo scritto in v, t a', b', ... sarà integrale particolare di (7), e trasformato in u e x, a, b, ... mediante le (6), e le relazioni che legano le a', b', ... alle a, b, ..., darà luogo ad un altro integrale particolare di (4), diverso in generale dal primo; e perciò di (4) sarà conosciuto l'integrale generale.

Ponendo

$$t^2 f(t, a, b, \dots) = \mathrm{F}(t, a, b, \dots)$$

la funzione F deve soddisfare all'equazione funzionale

$$\mathrm{F}(t, a, b, \dots) = \mathrm{F}\left(\frac{1}{t}, a', b', \dots\right). \tag{8}$$

Di F soddisfacenti a tale equazione se ne possono formare di varî tipi, e cioè può porsi p. es.

$$\mathrm{F} = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + b_2 t + \cdots + b_n t^n} \tag{9}$$

la quale resta appunto inalterata ponendo $\frac{1}{t}$ in luogo di t, e scambiando fra loro a_{n-s} con a_s e b_{n-s} con b_s.

Può porsi

$$\mathrm{F} = \Phi\left(t, \frac{1}{t}\right) \tag{10}$$

essendo Φ il simbolo di una funzione *simmetrica*; e può porsi anche:

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}\, t^a + \mathrm{B}\, t^b + \cdots \tag{11}$$

la quale resta inalterata mutando t in $\frac{1}{t}$ e $a, b, \dots$ in $-a$, $-b, \dots$

Sia allora determinata una di queste F; l'equazione di Riccati corrispondente sarà

$$z' + z^2 = x^{-2}\, \mathrm{F}(x), \tag{12}$$

e, *se di questa è conosciuto un integrale particolare* z_1, *con una quadratura, dalla* (5) *si otterrà il corrispondente integrale particolare* $u_1(x, a, b, \dots)$ *dell'equazione*

$$\frac{d^2u}{dx^2} = x^{-2}\, \mathrm{F}(x) \,.\, u, \tag{13}$$

indi da questo col mutamento di x in $\frac{1}{x}$, di a, b, ... in a', b', ... e di u_1 in $\frac{u_2}{x}$ (indicando con u_2 un altro integrale particolare dell'equazione (12), la quale, come abbiamo visto, resta inalterata con questi mutamenti) si ha il valore di u_2, cioè

$$u_2 = x\,u_1\left(\frac{1}{x}, a', b', \ldots\right) \tag{14}$$

e infine coi due integrali (in generale diversi) u_1, u_2 *si forma*

$$z = \frac{cu_1' + u_2'}{cu_1 + u_2}$$

che sarà l'integrale generale dell'equazione di Riccati (12).

L'equazione considerata da me nel lavoro succitato, e che comprende come particolari gli altri casi considerati dagli altri Autori citati, è appunto del tipo precedente, F avendo la forma (10), e propriamente essendo

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}x^{2\lambda} + \mathrm{B}x^{\lambda} + \mathrm{C}. \tag{15}$$

A proposito della trasformazione (6), che lascia invariata, a meno di un fattore, la derivata seconda, è utile aggiungere l'osservazione che la più generale trasformazione del tipo

$$u = v\,\varphi(t) \quad , \quad x = \psi(t) \tag{16}$$

la quale lascia invariata la derivata seconda, a meno di un fattore, è poco più generale della (6), e con una nuova trasformazione di t, può sempre ridursi ad una che non differisca dalla (6) se non per una costante moltiplicativa e un'altra additiva nel valore di x.

Giacchè dalla (16) si ha

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\varphi}{\psi'^2}\frac{d^2v}{dt^2} + \left[\frac{\varphi'}{\psi'^2} + \frac{1}{\psi'}\left(\frac{\varphi}{\psi'}\right)'\right]\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\psi'}\left(\frac{\varphi'}{\psi'}\right)' v;$$

e ponendo

$$\left(\frac{\varphi'}{\psi'}\right)' = 0 \quad , \quad \frac{\varphi'}{\psi'} + \left(\frac{\varphi}{\psi'}\right)' = 0,$$

si deducono consecutivamente le relazioni:

$$2\varphi'\psi' - \varphi\psi'' = 0 \qquad \psi' = c_1\varphi'$$

$$2\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\psi''}{\psi'}$$

$$\varphi^2 = c_2\psi' = \frac{-1}{c}\varphi' \quad , \quad \left(c = -\frac{1}{c_1 c_2}\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{ct + c'} \quad , \quad \psi = \frac{\mathrm{C}t + \mathrm{C}'}{ct + c'}$$

onde colla nuova opposizione

$$ct + c' = s$$

la (16) diventa

$$u = \frac{v}{s} \quad , \quad x = \frac{\text{cost}}{s} + \text{cost} .$$

Ma se poi si vuole solo che la (4) conservi il medesimo tipo, senza che resti invariata, a meno di un fattore, la derivata seconda, basta allora porre

$$2\,\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\psi''}{\psi'}$$

e quindi

(17) $$\psi = c \int \varphi^2\, dt ,$$

e, assegnata arbitrariamente $\varphi(t)$, si avrebbe una ψ e quindi una trasformazione (16) per la quale la (4) conserva la stessa forma. Potrebbe quindi immaginarsi in (4) una funzione $f(x)$ che, coi cangiamenti indicati, e coll'aggiunta del termine che risulta dalla trasformazione del primo membro, resti invariata, quando vi si facciano anche, se occorre, opportuni cangiamenti nelle costanti che entrano nella sua formazione. Ad ognuna di tali funzioni f corrisponde una equazione di Riccati per la quale può farsi la medesima considerazione fatta di sopra. Si hanno così altre equazioni di Riccati godenti sempre della medesima proprietà.

Poniamo p. es. $\varphi(t) = t$; si ha $\psi = t^3$, e la (4) diventa

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \left[\frac{2}{t^2} + 9t^4 f(t^3)\right] v .$$

Sia

(18) $$\frac{2}{t^2} + 9t^4 f(t^3) = f(t) ;$$

per una f soddisfacente a questa relazione la (2) è un'equazione della specie richiesta.

Poniamo

(19) $$t^2 f(t\,,\,a\,,\,b) = a\mathrm{F}(t) + b$$

essendo $a\,,\,b$ due costanti qualunque; se facciamo che insieme al cangiamento di t in t^3, le costanti $a\,,\,b$ debbano rispettivamente mutarsi in $\frac{1}{9}\,a$, $\frac{b-2}{9}$, la relazione (18) scritta come segue:

$$9t^6 f\left(t^3\,,\,\frac{1}{9}\,a\,,\,\frac{b-2}{9}\right) + 2 = t^2 f(t\,,\,a\,,\,b)$$

diventa semplicemente

(20) $$\mathrm{F}(t^3) = \mathrm{F}(t) .$$

Quindi la determinazione di f può ridursi a quella di una F soddisfacente a (20), e di queste se ne possono formare di natura molto generale; p. es. prendere per F una funzione di t^c, la quale resta appunto inalterata mutando t in t^3 e c in $\frac{c}{3}$.

Chimica. — *Sopra una trasformazione del dimetilpirrolo.* Nota del Corrispondente A. Angeli e G. Marchetti.

In una Nota comunicata recentemente a questa Accademia (¹) abbiamo dimostrato che gli eteri dell'acido formico reagiscono sopra l'α-metilindolo per dare un prodotto che è identico ad una sostanza che Plancher e Ponti (²) prepararono per la prima volta dallo stesso indolo per azione del cloroformio in presenza di potassa. La nuova sintesi rende molto probabile che si tratti di un derivato ossimetilenico, ed in tal modo si spiega anche per quale ragione esso non reagisca con la biossiammoniaca per dare l'acido idrossammico corrispondente.

Ciò basta per il nostro scopo e non è nostra intenzione di proseguire nello studio di questi derivati. Accennammo pure brevemente che dal miscuglio proveniente dall'α-α-dimetilpirrolo ed etere formico, per azione della p-nitrofenilidrazina si otteneva piccola quantità di un idrazone, il cui contenuto in azoto corrisponde a quello del derivato ossimetilenico, derivato che non riuscimmo ad isolare in causa della tenue quantità di prodotto di cui potevamo disporre.

Nel mentre però le proprietà dei derivati ottenuti per le due differenti vie dal metilindolo sono le stesse, nel caso del dimetilpirrolo vi è qualche discordanza, come ci risulta da una comunicazione privata che gentilmente ci fornì il prof. Plancher stesso e perciò noi abbiamo eseguiti alcuni saggi allo scopo di chiarire questo punto e di trovare la causa cui è dovuta la differenza in parola. Bisogna notare che il prof. Plancher è partito da un prodotto puro, mentre invece noi, come si è detto, facemmo reagire la p-nitrofenilidrazina sopra il miscuglio che contiene ancora del pirrolo inalterato; e sebbene prima d'ora, a quanto noi si sappia, non sieno state eseguite esperienze in questo senso, non si poteva escludere che il pirrolo subisse un processo di idrolisi, con apertura del nucleo:

$$\begin{array}{l} CH = C(CH_3) \\ | \\ CH = C(CH_3) \end{array}\!\!\!> NH + 2NH_2 \cdot NH \cdot C_6H_4 \cdot NO_2 =$$

$$= \begin{array}{l} CH_2 \cdot C(CH_3) : N_2H \cdot C_6H_4 \cdot NO_2 \\ | \\ CH_2 \cdot C(CH_3) : N_2H \cdot C_6H_4 \cdot NO_2 \end{array} + NH_3$$

(¹) Questi Rendiconti, vol. XVI, 2° sem., pag. 790.
(²) Ibid., vol. XVI, 1° sem., pag. 130.