ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

se è doveroso che la storia della scienza tenga in giusto conto tutti i tentativi, dai primordii fino al completo sviluppo di ogni dottrina, non è men vero che ad essa non associano il loro nome che quelli che ne intuirono e svolsero i concetti fondamentali. Così ad es. parlando del sistema periodico è sufficiente citare il nome del Mendeléeff e quello di L. Meyer senza dovere ricordare anche quelli dei molti loro predecessori.

Ora, il vero merito di Le Bel e di van't Hoff non consiste soltanto, come da alcuni si crede, nell'essersi giovati della nota disposizione tetraedrica, che era già contenuta nel non meno famoso modello di Kekulé per l'atomo di carbonio tetravalente, ma bensì nell'avere riconosciuto che questa disposizione nel caso dei quattro radicali diversi, dà origine a due forme enantiomorfe e nell'essersi serviti di questa rappresentazione per spiegare le isomerie ottiche; inoltre di avere a complemento di questa dottrina considerato il caso del doppio legame per prevedere altre isomerie che nelle formole piane non erano comprese.

Però io credo di non avere fatto nessun torto al prof. Paternò dicendo, come scrissi nel mio articolo, che il concetto dell'atomo di carbonio tetraedrico venne *svolto* da Le Bel e da van't Hoff.

Matematica. — *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari.* Nota del Corrispondente F. Enriques e di F. Severi.

1. Scopo di questa Nota è di esporre un teorema che permette di caratterizzare, mediante i valori dei generi e dei plurigeneri, le superficie iperellittiche irregolari (di rango $r \geq 1$). Il teorema può essere enunciato sinteticamente come segue:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè una superficie algebrica irregolare sia iperellittica, si possono esprimere dicendo che il genere numerico $p_a = -1$ *e che i plurigeneri* P_i $(i = 1, 2 \ldots)$ *assumono soltanto i valori* 0,1.

Più precisamente queste condizioni corrispondono a un numero finito di tipi che si lasciano definire mediante i valori dei primi plurigeneri (n. 4).

Il teorema sopra enunciato si riattacca alla determinazione mediante i valori dei plurigeneri delle « superficie ellittiche possedenti due fasci di curve ellittiche », la qual determinazione — appunto per questo scopo — fu da noi indicata nella Nota che avemmo l'onore di presentare all'Accademia nell'aprile scorso.

Ma sebbene possedessimo già allora, nelle sue linee generali, la dimostrazione del fatto che « ogni superficie ellittica con due fasci di curve ellittiche è iperellittica », ci trattenne dall'enunciare la conclusione un dubbio che, per motivi di salute, non potemmo appurare. Si tratta precisamente di

questo: quando si procede ad un'analisi aritmetica delle superficie iperellittiche irregolari di rango $r > 1$, si trovano (in rapporto cogli ordini dei corrispondenti gruppi) delle superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche il cui determinante riceve soltanto valori particolari (e precisamente i valori $n = 2, 3, 4, 6, 8, 9$) (1), e non si vede subito a priori che si esauriscono per tal modo tutte le superficie ellittiche predette; onde per questo lato si affaccia il dubbio che l'imposizione di valori particolari al determinante, costituisca una condizione da aggiungere ai valori dei generi, per esprimere che una data superficie ellittica è iperellittica.

Mentre ci proponevamo di ritornare su questo punto, i sigg. Bagnera e De Franchis sono giunti dal canto loro a chiarire la cosa e a riconoscere — in modo indipendente dalla nostra ricerca — il fatto che « tutte le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche sono iperellittiche »; questo fatto essi hanno enunciato in una recente Nota dei Comptes Rendus dell'Accademia di Francia, ricca di altri risultati importanti.

Siccome però in codesta Nota non si trova messo in rapporto il fatto suaccennato coi valori dei plurigeneri, stimiamo non inutile ritornare sull'argomento esponendo i brevi sviluppi che seguono.

2. Ci sia permesso anzitutto di riassumere la nostra dimostrazione del teorema che « le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche sono iperellittiche ».

Sia data una superficie ellittica con due fasci di curve ellittiche C, K (secantisi in $n > 1$ punti).

Si tratta di costruire una superficie F iperellittica di rango 1, che sia rappresentata sulla Φ multipla senza punti di diramazione; le coordinate dei punti di Φ sono allora funzioni razionali di quelle dei punti di F.

Accenneremo brevemente come si possa procedere all'effettiva costruzione dell'anzidetta superficie multipla. Perciò ricordiamo alcune cose intorno alle superficie ellittiche (2).

Una superficie ellittica Φ — di determinante $n > 1$ — può rappresentarsi sopra un cilindro ellittico

$$\varphi(xy) = 0$$

multiplo secondo il numero n, con una curva di diramazione composta di t

(1) Questo risultato è implicito nelle tabelle che i sigg. Bagnera e De Franchis hanno pubblicato al n. 5 della Nota inserita in questi Rendiconti (aprile 1907); e da parte nostra fu sviluppato mediante un'analisi contenuta nella parte addizionale di una Memoria che abbiamo inviato all'Accademia di Francia (luglio 1907).

(2) Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*. Rendic. Circolo di Palermo, 1905 (§§ 8, 9).

sezioni piane $z = a_1$, $z = a_2 \ldots z = a_t$. A queste componenti della curva di diramazione competono certi ordini

$$s_1 , s_2 , \ldots , s_t ,$$

e, se le curve C formanti il fascio ellittico di Φ debbono essere ellittiche, si deve avere

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=t} \frac{s_i - 1}{s_i} = 2 ,$$

d'onde segue

$$t = 4 , s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2 ,$$

oppure :

$$t = 3 , s_1 = s_2 = s_3 = 3$$
$$\text{o: } s_1 = 2 , s_2 = s_3 = 4 ,$$
$$\text{o: } s_1 = 2 , s_2 = 3 , s_3 = 6 .$$

In corrispondenza a questi casi si avrà

$$n = 2\delta ,$$
$$n = 3\delta ,$$
$$n = 4\delta ,$$
$$n = 6\delta ,$$

dove δ è un intero *a priori* arbitrario.

Limitiamoci per semplicità al primo caso.

Allora, si può costruire una superficie iperellittica F rappresentata sulla Φ contata due volte senza punti di diramazione, nel modo seguente:

Essendo

$$\Phi(xyz) = 0$$

l'equazione della superficie Φ, avente un certo ordine m, esiste una superficie di ordine $2m - 8$

$$\chi(xyz) = 0 ,$$

biaggiunta alla Φ, la quale è di bigenere 1 $(n \,.\, 3 \,.\, a)$.

Consideriamo le equazioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi(xyz) = 0 \\ u^2 = \chi(xyz) ; \end{cases}$$

esse rappresentano nello spazio $S_4\,(xyzu)$ una superficie F. Ora si può verificare che le sezioni di F cogli iperpiani paralleli all'asse u sono curve *irriducibili* secantisi secondo gruppi *canonici*, e se ne deduce che la F è una superficie irriducibile di genere $p_g = 1$, avente inoltre tutti i plurige-

neri $P_i = 1$ $(i = 2, 3, 4 \ldots)$. D'altra parte, poichè sulla Φ doppia non vi sono punti di diramazione, per una nota formula di corrispondenza [1] il genere numerico di F risulterà, come quello di Φ,

$$p_a = -1;$$

ma queste condizioni definiscono, come è noto [2], le superficie iperellittiche di rango 1.

3. Ciò premesso, passiamo a caratterizzare le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche, mediante i valori dei loro plurigeneri.

Si ha anzitutto $p_g = 0$, $p_a = -1$. Per calcolare i valori dei plurigeneri distinguiamo i 4 casi sopra menzionati:

$$a) \quad t = 4, \; s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2.$$

Le superficie così definite dipendono da due moduli arbitrarî, cioè dal modulo di φ e dal birapporto $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$. I valori dei plurigeneri si calcolano mediante la formula di Enriques [3]:

$$P_m = 1 + m(t-2) - \sum_{i=1}^{t} \varrho_i, \tag{3}$$

ove ϱ_i è un intero soddisfacente alle condizioni

$$\frac{m}{s_i} \leq \varrho_i < \frac{m}{s_i} + 1$$

e ove si prenda $P_m = 0$ tutte le volte che il 2° membro risulti negativo. Si trova così:

$$p_a = -1, \; P_{2i+1} = 0, \; P_{2i} = 1.$$

Reciprocamente questi valori caratterizzano le superficie di cui si tratta, giacchè anzi basta che si abbia

$$p_a = -1, \; p_g = 0, \; P_2 = P_4 = 1 \; [4].$$

Infatti, essendo $p_a = -1$, $p_g = 0$, si ha una superficie ellittica i cui plurigeneri possono essere calcolati mediante la formola (3). Ora, poichè $P_2 = t - 3 = 1$, verrà $t = 4$; e poichè $P_4 = 1$, verrà $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2$; donde segue che, essendo soddisfatta la (1), sulla superficie ellittica in questione le curve del fascio ellittico sono ellittiche.

$$b) \quad t = 3, \; s_1 = s_2 = s_3 = 3.$$

[1] Severi, Rendiconti del R. Ist. Lombardo, (2), t. 36, 1903.

[2] Enriques, *Sulle superficie che ammettono un gruppo continuo*, ecc. Rendic. Circolo di Palermo, 1905.

[3] 1ª Memoria citata § 8.

[4] In luogo di $P_4 = 1$ si può anche scrivere $P_6 = 1$.

Le superficie corrispondenti dipendono da un sol modulo: quello di φ (e le curve ellittiche C delle superficie stesse sono equianarmoniche). Pei valori dei relativi plurigeneri trovasi:

$$p_a = -1 , P_{3i+1} = P_{3i+2} = 0 , P_{3i} = 1 .$$

Questi valori caratterizzano le superficie in questione. Basta anzi che sia

$$p_a = -1 , P_3 = 1 , P_8 = 0 ,$$

giacchè dalla formola (3), con un'ovvia analisi aritmetica, si trae

$$t = 3 , s_1 = s_2 = s_3 = 3 .$$
$$c) \quad t = 3 , s_1 = 2 , s_2 = s_3 = 4 .$$

Le superficie così definite, possedenti un fascio ellittico di C armoniche, dipendono da un sol modulo. Si ha per esse:

$$p_a = -1 , P_{4i+1} = P_{4i+2} = P_{4i+3} = 0 , P_{4i} = 1 .$$

Come nei casi precedenti si vede che questi valori dei plurigeneri caratterizzano le superficie in questione, bastando anzi che si abbia

$$p_a = -1 , P_4 = 1 , P_6 = P_{10} = 0 .$$
$$d) \quad t = 3 , s_1 = 2 , s_2 = 3 , s_3 = 6 .$$

Le superficie così definite — possedenti, come nel caso b), un fascio ellittico di curve equianarmoniche — dipendono da un modulo. Per esse

$$p_a = -1 , P_{6i+1} = P_{6i+2} = \ldots = P_{6i+5} = 0 , P_{6i} = 1 .$$

Questi valori caratterizzano tali superficie ellittiche, ed anzi basta p. es. che sia

$$p_a = -1 , P_2 = P_3 = P_{14} = 0 , P_6 = 1 .$$

In tal caso la discussione che conduce al risultato è un po' meno semplice che nei casi precedenti, e perciò la riferiremo.

Essendo $P_2 = 0$ e quindi $p_g = 0$, la superficie in questione, di genere $p_a = -1$, è una superficie ellittica i cui plurigeneri possono calcolarsi mediante la (3). Dall'ipotesi $P_2 = 0$ segue intanto $t = 3$. L'ipotesi $P_6 = 1$ dà facilmente:

$$\alpha) \quad s_i \geq 3 \; (i = 1 , 2 , 3)$$

oppure:

$$\beta) \quad s_1 = 2 , s_2 \geq 3 , s_3 \geq 6 .$$

Osserviamo ora che $P_4 = 0$. Infatti se fosse $P_4 > 0$, poichè $P_6 = 1$, esisterebbe il sistema bicanonico, contro l'ipotesi $P_2 = 0$. La relazione $P_4 = 0$, tenendo conto dei possibili valori α) β) per le s_i, porta

$$\alpha') \quad s_1 = s_2 = s_3 = 3 ,$$

oppure:

$$\alpha'') \ s_1 = s_2 = 3 \ , \ s_3 \geq 4 \ ,$$
$$\beta') \ s_1 = 2 \ , \ s_2 = 3 \ , \ s_3 \geq 6 \ .$$

Poichè i valori $\alpha') \ \alpha'')$ dànno $P_3 = 1$, l'ipotesi $P_3 = 0$ porta a scartarli e restano quindi come possibili i soli valori $\beta')$. L'ipotesi $P_{14} = 0$ porta infine a concludere che $s_3 = 6$.

4. Riassumendo, e ricordando che le superficie iperellittiche di rango 1 (superficie di Picard) sono caratterizzate dai valori $p_a = -1 \ , p_g = P_4 = 1$ dei plurigeneri (1); si ha il seguente teorema:

Le condizioni affinchè una superficie irregolare sia iperellittica di rango $r \geq 1$, *si possono esprimere mediante i valori dei relativi generi e plurigeneri, indicati nella tabella seguente*:

$$p_a = -1 \begin{cases} 1°) \ r > 1 \ , p_g = 0 \ , P_2 = P_4 = 1 \\ 2°) \ r > 1 \ , P_8 = 0 \ , P_3 = 1 \\ 3°) \ r > 1 \ , P_6 = P_{10} = 0 \ , P_4 = 1 \\ 4°) \ r > 1 \ , P_2 = P_3 = P_{14} = 0 \ , P_6 = 1 \\ 5°) \ r = 1 \ , p_g = P_4 = 1 \ . \end{cases}$$

Mediante l'analisi aritmetica accennata in principio, il teorema acquista una maggiore determinazione, e precisamente risulta che:

I valori del rango r, *del divisore* δ *e del determinante* n $(= r\delta)$ *corrispondentemente ai singoli casi* 1°) 2°) ... 5°) *della tabella precedente, son dati da quest'altra tabella*:

$$1°) \ r = 2 \begin{cases} \delta = 1 \ , n = 2 \\ \delta = 2 \ , n = 4 \end{cases}$$

$$2°) \ r = 3 \begin{cases} \delta = 1 \ , n = 3 \\ \delta = 3 \ , n = 9 \end{cases}$$

$$3°) \ r = 4 \begin{cases} \delta = 1 \ , n = 4 \\ \delta = 2 \ , n = 8 \end{cases}$$

$$4°) \ r = 6 \quad \delta = 1 \ , n = 6$$

$$5°) \ r = 1 \ , \ \delta \text{ qualunque.}$$

I casi 1°) 2°) 3°) comprendono ciascuno due famiglie, dipendenti nel 1° caso da due moduli e negli altri due da un sol modulo.

Il 4°) caso comprende una sola famiglia dipendente da un sol modulo e il 5°) infinite famiglie dipendenti da tre moduli.

(1) Enriques, 2ª Memoria citata.