ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

viduo 10°.34'.6''. Ora, il geminato di Baveno presenta varie faccie vicinali e anche una faccia vicinale che è comune ad entrambi, si trova nella zona [(1$\bar{1}$0) : (021)] e fa con (1$\bar{1}$0) e *($\bar{1}\bar{1}$0)* circa 90°; come se la presenza di due faccie a indici molto semplici e quindi molto probabili facenti fra di loro un angolo piccolo, siano incompatibili senza faccie vicinali che le colleghino, le quali per ciò riescono molto probabili, benchè abbiano indici complicati. Io sono ben lontano dal trarre da questo fatto una legge, che dovrebbe dietro a sè averne molti; lascio piuttosto ad esso il peso che può avere.

Matematica. — *Applicazioni del calcolo delle variazioni alle equazioni differenziali che non coincidono con le equazioni aggiunte.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio U. DINI.

Ho cercato di estendere alle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali, che non coincidono con l'equazione aggiunta, le proprietà di cui godono le equazioni, che provengono da un problema di calcolo delle variazioni. Ne ho dedotto da un lato il teorema, di cui ci occuperemo al n. 1, e d'altro lato alcuni teoremi di esistenza per certi sistemi di equazioni alle derivate parziali, di cui ci occuperemo al n. 2.

1. Siano x, y coordinate cartesiane ortogonali; sia Γ un campo del piano (x, y), e c il suo contorno. Le funzioni, di cui ci occuperemo, siano finite e continue in Γ, incluso il contorno c, insieme a tutte quelle loro derivate, che ci occorreranno nelle deduzioni seguenti.

Siano u, v due funzioni di x, y; e sia

$$(1)\qquad \mathrm{F} = \sum \alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\, \partial y^s} \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m\, \partial y^n}, \qquad (r+s \leq h\ ;\ m+n \leq k)$$

dove con α_{rs}^{mn} indico funzioni di x, y, con h, k numeri interi positivi, con u una fuzione di x, y per cui sian prefissati su c i valori, insieme a quelli delle prime $h-1$ derivate normali, con v una funzione di x, y per la quale sieno prefissati su c i valori, insieme a quelli delle prime $k-1$ derivate normali. La sommatoria del seconde membro della (1) si suppone fatta rispetto a qnei valori degli indici r, s, m, n per cui sono soddisfatte le:

$$r, s, m, n = \text{numeri interi non negativi}$$
$$r+s \leq h\ ;\ m+n \leq k.$$

Le α_{rs}^{mn} si immaginano funzioni fissate a priori; le u, v si immaginano invece funzioni variabili, soddisfacenti soltanto alle date condizioni su c, e alle imposte condizioni di continuità e derivabilità in Γ e c. Posto

$$\text{(2)} \qquad J(u, v) = \iint_\Gamma F\, dx\, dy\,,$$

scriviamo l'equazione

$$\text{(3)} \qquad \delta J = 0\,.$$

Con integrazioni per parti si ottiene facilmente, in virtù delle condizioni imposte alla u su c [1], che

$$\iint_\Gamma \alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{r+s}(\delta u)}{\partial x^r\, \partial y^s} \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^r\, \partial y^s} = (-1)^{r+s} \iint_\Gamma \delta u \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r\, \partial y^s}\left[\alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m\, \partial y^n}\right] dx\, dy$$

cosicchè sarà

$$\text{(4)} \qquad \delta J = \iint_\Gamma \{ \delta u\, G(v) + \delta v\, H(u) \}\, dx\, dy$$

dove

$$\text{(5)} \qquad G(v) = \sum (-1)^{r+s} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r\, \partial y^s}\left[\alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m\, \partial y^n}\right]$$

$$\text{(5)}^{bis} \qquad H(u) = \sum (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n}\left[\alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\, \partial y^s}\right].$$

Affinchè dunque per certe funzioni u, v soddisfacenti alle condizioni imposte valga la (3), dovrà essere:

$$\text{(6)} \qquad G(v) = 0$$

$$\text{(7)} \qquad H(u) = 0\,.$$

Noi dimostreremo ora:

I polinomî $G(v)$, $H(u)$ *sono polinomî aggiunti.*

Infatti, per noti teoremi, entrambe le espressioni

$$(-1)^{r+s} u \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r\, \partial y^s}\left[\alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m\, \partial y^n}\right] - \left[\alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m\, \partial y^n}\right] \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\, \partial y^s}$$

$$(-1)^{m+n} v \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n}\left[\alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\, \partial y^s}\right] - \left[\alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\, \partial y^s}\right] \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m\, \partial y^n}$$

si possono scrivere sotto la forma $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$, dove P, Q sono polinomî in

[1] Da queste condizioni segue che δu, e le prime $h-1$ derivate normali di δu sono nulle su c, ossia che δu e le sue derivate parziali di ordine non maggiore di $h-1$ sono nulle su c.

$u\,, v\,,$ e nelle loro derivate. Altrettanto avverrà della loro differenza, ossia di

$$\Delta_{rs}^{mn} = (-1)^{r+s} u \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r\, \partial y^s}\left[\alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m\, \partial y^n}\right] - \\ - (-1)^{m+n}\, v \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n}\left[\alpha_{rs}^{mn} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\, \partial y^s}\right]$$

e quindi anche di

$$\sum \Delta_{rs}^{mn} = u\, \mathrm{G}(v) - v\, \mathrm{H}(u).$$

Ciò dimostra appunto il teorema enunciato. *Resta così estesa ad equazioni differenziali non identiche alla corrispondente equazione aggiunta la proprietà di potersi dedurre da un problema di variazione.*

È però da osservarsi che questo teorema, che pure mi sembra abbastanza interessante, non corrisponde ad alcuna proprietà di minimo, e che il suo significato è semplicemente il seguente:

Se la u soddisfa alla $\mathrm{H}(u) = 0$, *il valore di* $\mathrm{J}(u\,, v)$ *è indipendente dalla speciale funzione v considerata, e dipende soltanto dalla u, e dai valori imposti su c alla v, e alle sue prime* $\mathrm{k} - 1$ *derivate normali.*

Un teorema analogo vale se v soddisfa alla $\mathrm{G}(v) = 0$.

2. Ciononostante, dal precedente teorema si può dedurre qualche proprietà di minimo; e in particolare se ne può dedurre, se si ammette il principio di Dirichlet, qualche notevole teorema di esistenza.

Sia $\mathrm{L} = \mathrm{U} + \mathrm{V} + \lambda \mathrm{F}$, dove λ è una costante, U, V, F sono rispettivamente una forma quadratrica nella u e nelle sue derivate, una forma quadratica nella v e nelle sue derivate, e una forma bilineare della u e sue derivate, e della v e sue derivate. La L, considerata come forma quadratica complessivamente delle $u\,, v$, e delle loro derivate, sia una forma definita, p. es. una forma positiva.

Posto

$$\mathrm{J}(u\,, v) = \int\!\!\int_{\Gamma} \mathrm{L}\, dx\, dy\,,$$

si scriva l'equazione:

$$\delta \mathrm{J} = 0\,.$$

Per i risultati precedenti questa equazione equivarrà alle:

$$(8) \qquad \begin{cases} h(u) + \lambda \mathrm{G}(v) = 0 \\ \lambda \mathrm{H}(u) + g(v) = 0\,, \end{cases}$$

dove le $\mathrm{G}(v)\,, \mathrm{H}(u)$ sono polinomî aggiunti. Ora, per le ipotesi fatte, nel caso attuale ha un significato effettivo il problema di Dirichlet per l'integrale $\mathrm{J}(u\,, v)$, il problema cioè di trovare le funzioni $u\,, v$, soddisfacenti su c alle condizioni imposte, e facenti assumere a $J(u, v)$ il valore minimo. Il principio di minimo di Dirichlet dimostra anzi per tali sistemi (8) i teoremi di esistenza, relativi a problemi al contorno.

Se p. es. $h = k = 1$, e le U, V sono forme quadratiche definitive positive rispettivamente nelle $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ e nelle $v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, allora, qualunque sia F, la $L = U + V + \lambda F$ è *in generale* una forma definita positiva delle

$$u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y},$$

se λ è abbastanza piccolo.

Il principio di minimo dimostra dunque *generalmente* i teoremi di esistenza relativi al sistema (8), quando

1°) *λ è una costante abbastanza piccola.*

2°) $h(u) = 0$, $g(v) = 0$ *sono equazioni lineari ellittiche del 2° ordine, provenienti da un problema di variazione.*

3°) $G(v)$, $H(u)$ *sono polinomi lineari aggiunti del 2° ordine.*

4°) *Per le u, v sono prefissati i valori, che esse devono assumere su c.*

Fisica-matematica. — *Sull'isteresi magnetica.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

In questa Nota mi propongo di applicare a qualche caso concreto i risultati generali cui sono pervenuto nella Nota precedente [1].

Vediamo anzitutto quale sia, in generale, il modo più conveniente per valutare le costanti a e b.

Si sieno determinate sperimentalmente n coppie di valori

$$F_i, r_i \; (i = 1, 2, \dots, n)$$

per la forza coercitiva F ed il corrispondente magnetismo residuo r di un assegnato metallo.

Possiamo scrivere la (9), che è lineare in a e b, sotto la forma seguente:

$$\frac{r}{F} b - a = r.$$

Adottiamo il simbolo [ ] per indicare la somma di n espressioni che non differiscono tra loro che per l'indice variabile da 1 a n; p. es. [F] indichi brevemente la somma $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$.

[1] Queste Rendiconti. Seduta del 5 aprile 1908, pp. 413-420.