

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

---

SERIE QUINTA

---

RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

su  $c$  alle condizioni imposte, e facenti assumere a  $J(u, v)$  il valore minimo. Il principio di minimo di Dirichlet dimostra anzi per tali sistemi (8) i teoremi di esistenza, relativi a problemi al contorno.

Se p. es.  $h = k = 1$ , e le  $U, V$  sono forme quadratiche definitive positive rispettivamente nelle  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  e nelle  $v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ , allora, qualunque sia  $F$ , la  $L = U + V + \lambda F$  è in generale una forma definita positiva delle

$$u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y},$$

se  $\lambda$  è abbastanza piccolo.

Il principio di minimo dimostra dunque *generalmente* i teoremi di esistenza relativi al sistema (8), quando

1°)  $\lambda$  è una costante abbastanza piccola.

2°)  $h(u) = 0, g(v) = 0$  sono equazioni lineari ellittiche del 2° ordine, provenienti da un problema di variazione.

3°)  $G(v), H(u)$  sono polinomi lineari aggiunti del 2° ordine.

4°) Per le  $u, v$  sono prefissati i valori, che esse devono assumere su  $c$ .

**Fisica-matematica.** — *Sull'isteresi magnetica.* Nota di U. CROSOTTI, presentata dal Corrispondente T. LEVI-CIVITA.

In questa Nota mi propongo di applicare a qualche caso concreto i risultati generali cui sono pervenuto nella Nota precedente (1).

Vediamo anzitutto quale sia, in generale, il modo più conveniente per valutare le costanti  $a$  e  $b$ .

Si sieno determinate sperimentalmente  $n$  coppie di valori

$$F_i, r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

per la forza coercitiva  $F$  ed il corrispondente magnetismo residuo  $r$  di un assegnato metallo.

Possiamo scrivere la (9), che è lineare in  $a$  e  $b$ , sotto la forma seguente:

$$\frac{r}{F} b - a = r.$$

Adottiamo il simbolo  $[ ]$  per indicare la somma di  $n$  espressioni che non differiscono tra loro che per l'indice variabile da 1 a  $n$ ; p. es.  $[F]$  indichi brevemente la somma  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ .

(1) Queste Rendiconti. Seduta del 5 aprile 1908, pp. 413-420.

I valori più convenienti delle incognite costanti  $a, b$  si ottengono mediante la risoluzione del sistema di equazioni lineari <sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} \left[ \frac{r^2}{F^2} \right] b - \left[ \frac{r}{F} \right] a &= \left[ \frac{r^2}{F} \right], \\ \left[ \frac{r}{F} \right] b - na &= [r]. \end{aligned}$$

Noti  $a$  e  $b$ , la (11) dà il valore di  $k$  e le (10), (12) e (13) danno le  $\Psi(y)$ ,  $\Psi'(y)$ ,  $\Psi(-y)$  e  $\Psi'(-y)$ .

Si hanno così tutti gli elementi per tracciare, per mezzo delle (7), i cicli corrispondenti ad una forza coercitiva  $F$  che soddisfaccia alla (17).

ESEMPI <sup>(2)</sup>.

1°. *Filo di ferro dolce.* — Da uno studio sperimentale del chiarissimo prof. Lori <sup>(3)</sup> ho potuto ricavare per le costanti  $a$  e  $b$  i valori seguenti, applicando il metodo generale suesposto,

$$\begin{aligned} a &= 1054, \\ b &= 3,3. \end{aligned}$$

Queste sarebbero le *costanti magnetiche* caratteristiche pel filo di ferro dolce.

La (11), per i valori trovati dà

$$k = \frac{3,3}{1054},$$

e le (10), (12) e (13) danno

$$\begin{aligned} \Psi(y) &= \frac{3,3 y}{1054 + y} ; \quad -\Psi(-y) = 1,1 \left[ \left\{ 1 + \frac{y}{1054} \right\}^3 - 1 \right], \\ \frac{1}{k} \Psi'(y) &= \frac{1}{\left( 1 + \frac{y}{1054} \right)^2} ; \quad \frac{1}{k} \Psi'(-y) = \left( 1 + \frac{y}{1054} \right)^2. \end{aligned}$$

Mediante queste possiamo formare la seguente tabella, che ci dà i valori di  $\Psi(y)$ ,  $-\Psi(-y)$ ,  $\frac{1}{k} \Psi'(y)$ ,  $\frac{1}{k} \Psi'(-y)$  per  $y$  positiva.

<sup>(1)</sup> Cfr. p. es. Pizzetti, *Trattato di Geodesia teoretica* (Bologna, 1905) pp. 304-305.

<sup>(2)</sup> Negli esempi che seguono intendiamo tutte le quantità espresse in unità del sistema C. G. S.

<sup>(3)</sup> *Le proprietà magnetiche del ferro dolce* (L'Elettricista, anno IV, nn. 2 e 4). Porgo i miei ringraziamenti al ch.mo prof. Lori che mi fu largo di notizie e consigli, specialmente per quanto riguarda la parte sperimentale della questione.

TABELLA 1<sup>a</sup>

$y$	$\Psi(y)$	$-\Psi(-y)$	$\frac{1}{k}\Psi'(y)$	$\frac{1}{k}\Psi'(-y)$
0	0	0	1,000	1,00
200	0,52	0,70	0,719	1,39
400	0,90	1,72	0,534	1,87
600	1,19	3,05	0,411	2,43
800	1,42	4,78	0,326	3,06
1000	1,60	6,93	0,265	3,76
1200	1,75	9,52	0,220	4,53
1400	1,88	12,62	0,185	5,38
1600	1,98	16,29	0,158	6,30
1800	2,08	20,54	0,137	7,29
2000	2,16	25,44	0,119	8,35

Chiamiamo  $x_a$  e  $x_d$  le ascisse dei punti del ramo ascendente e discendente di un generico ciclo; richiamando le (7) avremo

$$(7') \quad \begin{cases} x_a = \frac{\Psi'(y)}{k} [F - \Psi(-y)], \\ x_d = \frac{\Psi'(-y)}{k} [\Psi(y) - F]. \end{cases}$$

A norma della (17) dovrà essere

$$1,1 \leq F \leq 1,65.$$

Fissiamo ad es.

$$F = 1,6.$$

Portando tale valore nelle (7') e usufruendo dei valori della tabella 1<sup>a</sup> possiamo formare la seguente

TABELLA 2<sup>a</sup>

$y$	$x_a$	$x_d$
0	1,60	-1,60
200	1,65	-1,50
400	1,77	-1,30
600	1,91	-0,99
800	2,07	-0,55
1000	2,26	0,00
1200	2,44	0,67
1400	2,63	1,50
1600	2,82	2,39
1800	3,03	3,49

Coi valori di questa tabella, si può segnare il semiciclo contenuto nel semipiano delle ordinate positive. Per simmetria rispetto all'origine delle coordinate si ottiene il rimanente semiciclo.

La fig. 1 rappresenta appunto il ciclo ottenuto in tal modo.

La fig. 2 dà il disegno del corrispondente ciclo ottenuto dal prof. Lori nella citata esperienza.

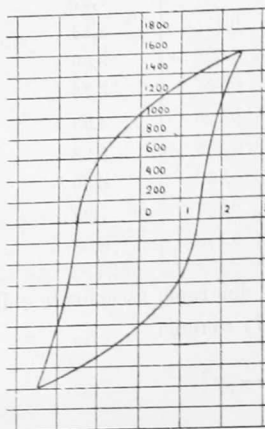


FIG. 1.

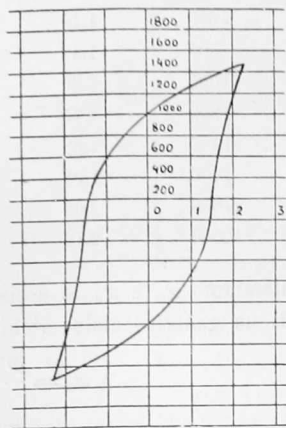


FIG. 2.

2°. *Filo d'acciaio temperato.* — Per un filo d'acciaio temperato si può prendere in cifra tonda

$$a = 600 \quad , \quad b = 30.$$

La (11) allora dà

$$k = \frac{1}{20},$$

e le (10), (12) e (13)

$$\Psi(y) = \frac{30y}{600+y} \quad , \quad -\Psi(-y) = 10 \left[ \left\{ 1 + \frac{y}{600} \right\}^3 - 1 \right];$$

$$\frac{1}{k} \Psi'(y) = \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{600}\right)^2} \quad , \quad \frac{1}{k} \Psi'(-y) = \left(1 + \frac{y}{600}\right)^2.$$

Mediante queste espressioni possiamo formare la tabella seguente

TABELLA 3<sup>a</sup>

$y$	$\Psi(y)$	$-\Psi(-y)$	$\frac{1}{k}\Psi'(y)$	$\frac{1}{k}\Psi'(-y)$
0	0	0	1,000	1,000
100	4,2	5,8	0,726	1,360
200	7,5	13,7	0,562	1,776
300	10,0	23,7	0,442	2,240
400	12,0	36,2	0,360	2,776
500	13,6	51,6	0,296	3,360
600	15,0	70,0	0,250	4,000
700	16,1	91,7	0,212	4,694
800	17,1	117,0	0,182	5,444
900	18,0	146,2	0,160	6,250

Le (7') determinano i due rami ascendente e discendente del ciclo, per una forza coercitiva  $F$ , che per la (17) deve soddisfare alla limitazione

$$10 \leq F \leq 15.$$

Si fissi per  $F$  un generico valore compreso tra 10 e 15. Ad ogni valore positivo di  $y$  le (7') ci danno i corrispondenti punti dei due rami del ciclo. A tal uopo basta usufruire dei valori forniti dalla tabella 3<sup>a</sup> e procedere in modo analogo a quello tenuto nell'esempio precedente.

La figura 3 rappresenta due cicli ottenuti col metodo esposto e corrispondenti ai due valori limiti di  $F$ , cioè 10 e 15.

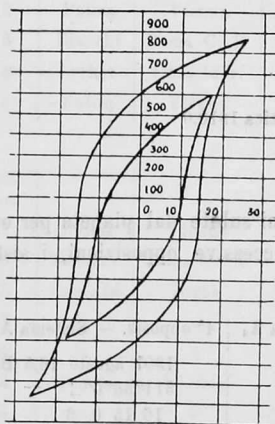


FIG. 3.

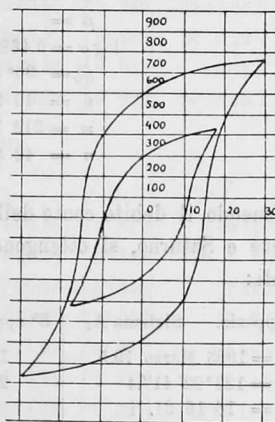


FIG. 4.

La figura 4 dà il fac-simile dei due corrispondenti cicli ottenuti dall'Ewing (1).

(1) *Magnetic induction in iron and other metals* (London, third edition, 1900), pag. 109.