

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Matematica. — *Sulle due funzioni a più valori costituite dai limiti d'una variabile reale a destra e a sinistra di ciascun punto.* Nota di W. H. YOUNG, Sc. D., F. R. S., presentata dal Socio SALVATORE PINCHERLE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Orbita ellittica di (521) Bixia in base alle prime 4 opposizioni.* Nota di EMILIO BIANCHI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Tutti i calcoli da me eseguiti su questo pianeta per le passate opposizioni ebbero a fondamento il sistema d'elementi che il prof. Millosevich dedusse dalle osservazioni fatte all'epoca della scoperta, utilizzando un intervallo di tempo di 84 giorni (da 18 gennaio a 11 aprile 1904).

Tale sistema d'elementi è il seguente:

1^a Opposizione — Sistema A₁
 T = 1904 febbraio 16,5 Berlino.
 M = 35° 23' 16".3
 φ = 16 16 26. 7
 μ = 780. 873
 log α = 0.438284
 $\left. \begin{array}{l} \Omega = 90^{\circ} 30' 17''.3 \\ i = 10 29 27. 5 \\ \omega = 312 19 51. 8 \\ \pi = 42 50 9. 1 \end{array} \right\} \text{ellittica 1910.0}$

Tenendo il debito conto delle perturbazioni subite dal pianeta per opera di Giove e Saturno, si ottengono, per le successive opposizioni, i sistemi seguenti:

2 ^a opposiz. — Sistema A ₂	3 ^a opposiz. — Sistema A ₃	4 ^a opposiz. — Sistema A ₄
T = 1905 Marzo 19.5	1906 giugno 2.5	1907 agosto 16.5 Berlino
M = 121° 22' 41".4	216° 38' 32".6	311° 56' 0".1
φ = 16 16 31. 1	16 15 47. 3	16 15 0. 6
μ = 780. 37029	780. 12109	780. 27540
log α = 0.438471	0.438563	0.438506
$\left. \begin{array}{l} \Omega = 90^{\circ} 29' 34''.6 \\ i = 10 29 23. 8 \\ \omega = 312 25 37. 8 \\ \pi = 42 55 12. 4 \end{array} \right\} \text{ellittica 1910.0}$	$\left. \begin{array}{l} 90^{\circ} 28' 56''.2 \\ 10 29 27. 9 \\ 312 29 50. 5 \\ 42 58 46. 7 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 90^{\circ} 28' 50''.0 \\ 10 29 26. 6 \\ 312 31 49. 8 \\ 43 0 39. 8 \end{array} \right\}$

Le osservazioni fatte in 4^a opposizione (1907 agosto) dimostrarono la necessità di apportare ormai a questi elementi quella correzione che valesse a dare all'orbita del pianeta un assestamento quasi definitivo.

La presente Nota riassume appunto i risultati ottenuti nel calcolo della correzione agli elementi che fu fatta col metodo dei coefficienti differenziali.

Osservazioni utilizzate. — Del pianeta, per quanto è giunto a mia conoscenza, abbiamo 30 osservazioni di prima opposizione, 8 di seconda, 2 di terza e 11 di quarta.

Ma non tutte furono utilizzate nel presente lavoro; poichè la deduzione dei luoghi normali fondamentali fu da me basata soltanto sulle osservazioni fatte in prossimità dell'osculazione di ognuno dei 4 sistemi precedenti, eliminando in tal modo l'influenza di vizî causati dalle perturbazioni nei luoghi troppo lontani dall'osculazione, ed avendo invece la massima cura nel discutere tali osservazioni, specie nei riguardi delle stelle di riferimento.

Ecco senz'altro le opposizioni utilizzate:

1^a OPPOSIZIONE.

Data	Osservatore	Osservatorio	Tempo medio locale	α app.	log. p. Δ	δ app.	log. p. Δ
1904 Febbraio						+	
7	Luther	Düsseldorf	^{h m s} 8 25 21	^{h m s} 5 2 31.51	8 ⁿ .710	^{° ' "} 25 20 29.6	0.583
10	Palisa	Vienna	9 36 26	4 19.76	9.303	34 24.7	.562
12	Bianchi	Roma C. R.	7 34 36	5 37.61	8 ⁿ .064	43 5 5	.384
12	Palisa	Vienna	9 50 23	5 40.80	9.369	25 43 26.8	.573
16	Bianchi	Roma C. R.	6 50 53	8 37.93	8 ⁿ .888	26 0 22.7	.383
18	Luther	Düsseldorf	8 23 40	10 22.54	9.045	9 7.9	.578
19	Palisa	Vienna	9 14 51	5 11 15.99	9.332	26 13 15.7	0.556

2^a OPPOSIZIONE.

1905 Marzo						+	
11	Palisa	Vienna	^{h m s} 14 29 24	^{h m s} 13 7 50.55	8.812	^{° ' "} 8 40 51.0	0.741
25	Millosev.	Roma C. R.	8 41 10	12 57 25.36	9 ⁿ .591	10 1 0.2	.717
25	Simonin	Nizza	10 40 9	57 20.43	9 ⁿ .356	1 31 2	.703
28	"	"	10 56 11	54 51.49	9 ⁿ .246	17 7.5	.694
30	"	"	10 39 59	53 11.92	9 ⁿ .274	26 55.4	.693
30	Palisa	Vienna	15 3 44	53 3.91	9.412	27 41.9	.750
31	"	"	14 40 18	12 52 14.48	9.367	10 32 17.6	0.745

3^a OPPOSIZIONE.

1906 Maggio						—	
22	Millosev.	Roma C. R.	^{h m s} 10 6 56	^{h m s} 16 16 41.38	9 ⁿ .389	^{° ' "} 14 28 7.2	0.847
22	Zappa	"	10 30 31	16 16 40.47	9 ⁿ .311	14 28 5.9	0.853

4^a OPPOSIZIONE.

Data	Osservatore	Osservatorio	Tempo medio	α app.	log. p.	δ app.	log. p.
1907 Agosto							
10	Zappa	Roma C. R.	h m s 12 16 41	h m s 22 22 5.72	9 ⁿ .040	25 36 15.6	0.905
13	Antoniazzi	Padova	12 52 57	19 49.27	7 ⁿ .530	26 4 20.7	.919
14	Zappa	Roma C. R.	12 3 43	19 4 00	8 ⁿ .992	26 13 10.7	.908
14	Antoniazzi	Padova	12 46 1	19 2.53	7 ⁿ .904	26 13 27.0	.920
17	"	"	13 3 5	22 16 35 51	8.741	26 40 17.6	0.919

Luoghi normali fondamentali. — Se si paragonano tali osservazioni colle effemeridi che discendono dai 4 sistemi precedenti, si ottengono, nel senso: osservazione-calcolo, gli scarti qui sotto riportati:

Data	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Data	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Data	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Data	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1904 Febb.			1905 marzo			1906 magg.			1907 agos.		
7	+ 0.33	+ 3.1	11	- 11.99	+ 100.7	22	- 10.78	+ 67.9	10	+ 64.62	+ 194.7
10	.31	1.6	25	12.57	102.0	22	- 10.76	+ 68.5	13	65.47	185.8
12	.35	2.2	25	12.72	101.3				14	65.81	180.7
12	.18	2.1	28	12.70	101.1				14	65.88	181.2
16	.34	3.2	30	12.83	103.0				17	+ 66.80	+ 171.9
18	.13	4.9	30	12.73	104.1						
19	+ 0.25	+ 3.2	31	- 12.84	+ 101.4						

Ridotti gli scarti $\Delta\alpha$ al cerchio massimo e tenendo conto della variazione media diurna di $\Delta\alpha \cdot \cos \delta$ e $\Delta\delta$, si conclude in definitivo coi valori seguenti:

1904 Febbraio 16.5	$\Delta\alpha \cos \delta = + 0.244 = + 3.7$;	$\Delta\delta = + 2.9$
1905 Marzo 25.5	$= - 12.400 = - 186.0$;	$= + 101.9$
1906 Maggio 22.5	$= - 10.430 = - 156.5$;	$= + 68.2$
1907 Agosto 14.5	$= + 59.066 = + 886.0$;	$= + 181.6$

che costituiscono appunto i termini noti delle equazioni risolutive del problema.

Se detti scarti si applicano alle effemeridi del pianeta si ottengono come luoghi normali fondamentali:

I) 1904 Febbraio 16.5	$\alpha_{\text{vera}} = 77.12.9.9$	$\delta_{\text{vera}} = + 26.1.20.4$
II) 1905 Marzo 25.5	$= 194.19.29.0$	$= + 10.1.50.9$
III) 1906 Maggio 22.5	$= 244.9.7.7$	$= - 14.28.0.2$
IV) 1907 Agosto 14.5	$= 334.45.57.4$	$= - 26.13.5.5$

Equazioni di condizione. — Il calcolo dei coefficienti differenziali delle equazioni di condizione fu fatto secondo il formulario proposto dall'Oppolzer;

e si ottenne il seguente sistema di relazioni fra i termini noti e le incognite del problema:

COEFFICIENTI LOGARITMICI.

0.27510	dL	+2.93281	dμ	+9.957863	dΦ	+0.50995	dΨ	+9 ⁿ .31217	sin i dΩ	+9 ⁿ .54129	di	= + 3.7
9.93105		1.11892		0.31401		9 ⁿ .09651		9.46168		9.19419		= - 186.0
9.91524		2.54942		9.80975		0 ⁿ .28553		8.75730		9 ⁿ .48675		= - 156.5
0.32441		3.27081		0 ⁿ .56930		0 ⁿ .10911		9 ⁿ .08318		9.60059		= + 886.0
9.74447		2 ⁿ .36217		8.69373		9.99044		9 ⁿ .47496		0.10322		= + 2.9
9 ⁿ .62195		1.19184		9 ⁿ .99367		8 ⁿ .64998		0.13847		9.52355		= + 101.9
9.45825		2 ⁿ .05622		9 ⁿ .43200		9.82372		0.04919		9 ⁿ .93756		= + 68.2
9.47963		2.66778		9 ⁿ .98786		9 ⁿ .74733		9 ⁿ .98761		0 ⁿ .14124		= + 181.6

Prima di passare alla deduzione delle equazioni normali, sulle precedenti si eseguirono queste operazioni:

- 1°) furono divisi per *mille* i termini noti;
- 2°) furono divisi pure per *mille* i coefficienti dell'incognita *dμ*.

Vale a dire: alle incognite del problema se ne sostituirono altre mille volte più piccole ad eccezione dell'incognita *dμ* che, dalle equazioni così trasformate, viene fornita nella sua grandezza reale.

EQUAZIONI NORMALI

(coefficienti logaritmici).

1.01246	x	+0.44500	y	+0 ⁿ .79814	z	+0.24175	t	+0 ⁿ .29174	u	+9.01157	w	= 0.21240
0.44500		+0.66490		+0 ⁿ .81374		+0 ⁿ .80736		+9 ⁿ .71248		+9.01115		= 0.22256
0 ⁿ .79814		+0 ⁿ .88174		+1.31298		+0.39715		+9.63599		+8.96190		= 0 ⁿ .66932
0.24175		+0 ⁿ .80736		+0.39715		+1.24494		+9.44917		+9.55279		= 9 ⁿ .93435
0 ⁿ .29174		+9 ⁿ .71248		+9.63599		+9.44917		+0.63587		+9.70484		= 9 ⁿ .11959
9.01157		+9.01115		+8.96190		+9.55279		+9.70484		+0.67988		= 8.99123

NORMALI RIDOTTE

(coefficienti numerici).

+10.2909	x	+2.7861	y	-6.2825	z	+1.7448	t	-1.9577	u	+0.1027	W	= +1.6308
		+3.8685		-5.0871		-6.8898		+0.0142		+0.0748		= +1.2279
				+10.0333		-5.4993		-0.7439		+0.2527		= -1.4572
						+1.9963		+0.2308		+0.6114		= +0.2519
								+3.8695		+0.4740		= +0.0369
										+4.5308		= +0.0131

donde i seguenti valori delle incognite:

$$\left. \begin{aligned}
 w &= \frac{di}{1000} = +0.00289 \\
 u &= \frac{\sin i d\Omega}{1000} = +0.00917 \\
 t &= \frac{d\Psi}{1000} = +0.12423 \\
 z &= \frac{d\Phi}{1000} = -0.07654 \\
 y &= d\mu = +0.43793 \\
 x &= \frac{dL}{1000} = -0.02617
 \end{aligned} \right\} \text{(I)}$$

Trasformati i due valori $d\Phi$ e $d\Psi$ nei corrispondenti $d\pi$ e $d\varphi$, si ottengono adunque le seguenti correzioni definitive agli elementi del pianeta:

$$\begin{aligned} di &= +0.289 \\ d\Omega &= +0.2132 \\ d\pi &= -8.2649 \\ d\varphi &= +0.3505 \\ d\mu &= +0.43793 \\ dL &= -0.2617 \end{aligned}$$

Se deduciamo il sistema dei residui forniti per una parte dalle equazioni di condizione e per l'altra dalla rappresentazione dei luoghi normali fondamentali cogli elementi così corretti, otteniamo:

Luogo normale	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$	Luogo normale	$\Delta\alpha \cos \delta$	$\Delta\delta$
I	+0.7	-0.4	I	+1.1	-0.1
II	+0.7	+0.6	II	+1.0	+0.2
III	-0.6	-0.7	III	-2.0	-0.7
IV	0.0	+0.4	IV	+0.4	+1.2

in accordo soddisfacente nei limiti d'approssimazione delle tavole numeriche a 6 decimali usate nella rappresentazione dei luoghi normali.

La grande piccolezza dei residui ottenuti dopo la correzione dell'orbita ci permette di fare alcune considerazioni.

Anzitutto tale piccolezza sta a dimostrare l'alto grado di fiducia che meritano i luoghi normali posti a fondamento della correzione. Poichè è vero che il numero delle equazioni di condizione supera solo di due quello strettamente necessario alla soluzione del problema (e che conduce quindi alla nullità dei residui), ma è altrettanto vero che una sensibile incertezza anche in una sola coordinata di uno dei luoghi normali avrebbe viziato il sistema delle incognite per modo che, passando alla rappresentazione, i residui sarebbero risultati inevitabilmente assai superiori.

Quando poi si consideri che alle 4 date dei luoghi normali corrispondono per l'anomalia vera del pianeta i valori:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad v &= 60^\circ \\ \text{II} \quad &= 145 \\ \text{III} \quad &= 201 \\ \text{IV} \quad &= 282 \end{aligned}$$

quando si pensi cioè alla grandzza dell'arco d'orbita eliocentrico abbracciato dai luoghi normali ed ancora al fatto che ognuno di essi giace in quadrante

diverso, è lecito concludere che le correzioni desunte per gli elementi debbono essere assai vicine alla verità.

Applicate le correzioni ottenute al sistema d'elementi osculanti in 4^a opposizione, e trasformatolo poscia dall'equatore all'eclittica, si ha:

$$\begin{aligned} T &= 1907 \text{ Agosto } 16 \text{ } 5 \text{ Berlino} \\ M &= 312^{\circ}. 10'. 23''. 2 \\ \varphi &= 16. 15. 35. 7 \\ \mu &= 780. 71333 \\ \log. a &= 0.4388433 \\ \Omega &= 90. 28. 54. 3 \\ i &= 10. 29. 36. 2 \\ \omega &= 312. 23. 17. 0 \\ \pi &= 42. 52. 11. 3 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} T \\ M \\ \varphi \\ \mu \\ \log. a \\ \Omega \\ i \\ \omega \\ \pi \end{aligned}} \right\} \text{ eclittica } 1910.0$$

che saranno gli elementi coi quali verrà eseguito ogni calcolo ulteriore sul pianeta.

I dettagli del presente lavoro saranno pubblicati nel prossimo volume delle Memorie del R. Osservatorio al Collegio Romano.

Meteorologia matematica. — *Contributo alla spiegazione degli aloni: la deviazione minima con riflessioni interne nei cristalli.* Nota di GIOVANNI ZAPPA, presentata dal Socio ELIA MILLO-SEVICH.

Il prof. Pernter in una sua Memoria (1): *Erklärung des fälschlich "weisser Regenbogen" benannten Bouguer'schen Halos*, riprende l'ipotesi appena accennata per la prima volta dal Brandes (2) che gli aloni generalmente bianchi osservati nei mari polari sieno dovuti a cristalli di ghiaccio anzichè a gocce d'acqua. Ora per la piena applicazione di questa ipotesi è necessario fare uno studio sistematico della deviazione minima quando sia accompagnata da riflessioni nell'interno dei cristalli, e tale compito appunto ci siamo prefissi col presente lavoro.

Per semplicità considereremo addirittura le sezioni cristalline e così parleremo di poligoni lati ed angoli anzichè di prismi faccie e diedri.

Assumiamo come positiva la deviazione $< 90^{\circ}$ che renderebbe nullo l'angolo di incidenza esterno e allora diremo positiva la deviazione $< 180^{\circ}$ che il raggio luminoso subisce per una riflessione interna, quando lascia la normale alla retta di riflessione dalla parte opposta a quella dalla quale aveva

(1) Kais. Akad. Wissensch. in Wien; Mathem.-naturwiss. Klasse, Bd XIV, Abt II a, Juli 1905.

(2) Gehler's Lexicon, Bd VII, 2 Abt, pag. 1329.