ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

diverso, è lecito concludere che le correzioni desunte per gli elementi debbono essere assai vicine alla verità.

Applicate le correzioni ottenute al sistema d'elementi osculanti in 4ª opposizione, e trasformatolo poscia dall'equatore all'eclittica, si ha:

$$
\begin{aligned}
T &= 1907 \text{ Agosto } 16.5 \text{ Berlino} \\
M &= 312^\circ.\ 10'.\ 23''.2 \\
\varphi &= 16.\ 15.\ 35.\ 7 \\
\mu &= 780.\ 71333 \\
\log. a &= 0.4383433 \\
\left.\begin{aligned}
\Omega &= 90.\ 28.\ 54.\ 3 \\
i &= 10.\ 29.\ 36.\ 2 \\
\omega &= 312.\ 23.\ 17.\ 0 \\
\pi &= 42.\ 52.\ 11.\ 3
\end{aligned}\right\} & \text{ eclittica } 1910.0
\end{aligned}
$$

che saranno gli elementi coi quali verrà eseguito ogni calcolo ulteriore sul pianeta.

I dettagli del presente lavoro saranno pubblicati nel prossimo volume delle Memorie del R. Osservatorio al Collegio Romano.

Meteorologia matematica. — *Contributo alla spiegazione degli aloni: la deviazione minima con riflessioni interne nei cristalli.* Nota di GIOVANNI ZAPPA, presentata dal Socio ELIA MILLOSEVICH.

Il prof. Pernter in una sua Memoria (¹): *Erklärung des fälschlich « weisser Regenbogen » benannten Bouguer'schen Halos*, riprende l'ipotesi appena accennata per la prima volta dal Brandes (²) che gli aloni generalmente bianchi osservati nei mari polari sieno dovuti a cristalli di ghiaccio anzichè a goccie d'acqua. Ora per la piena applicazione di questa ipotesi è necessario fare uno studio sistematico della deviazione minima quando sia accompagnata da riflessioni nell'interno dei cristalli, e tale compito appunto ci siamo prefissi col presente lavoro.

Per semplicità considereremo addirittura le sezioni cristalline e così parleremo di poligoni lati ed angoli anzichè di prismi faccie e diedri.

Assumiamo come positiva la deviazione $< 90^\circ$ che renderebbe nullo l'angolo di incidenza esterno e allora diremo positiva la deviazione $< 180^\circ$ che il raggio luminoso subisce per una riflessione interna, quando lascia la normale alla retta di riflessione dalla parte opposta a quella dalla quale aveva

(¹) Kais. Akad. Wissensch. in Wien; Mathem.-naturwiss. Klasse, Bd XIV, Abt II*a*, Juli 1905.
(²) Gehler's Lexicon, Bd VII, 2 Abt, pag. 1329.

la normale al lato di incidenza, quando su di esso è venuto a battere (tale è ad esempio la deviazione ABC della fig. 1), e negativa quella per una riflessione in cui la normale alla retta di riflessione resta dalla stessa parte, dalla quale era la normale al lato di incidenza, come per esempio la ABC nella fig. 2. In tale ipotesi la deviazione subìta in una riflessione dall'angolo di incidenza $|i|$ è $\pm\{\pi - 2|i|\}$, in cui dovremo prendere il segno $+$ se la riflessione ha dato una deviazione positiva (riflessione positiva) e il segno $-$ se la riflessione ha dato una deviazione negativa (riflessione negativa) e la deviazione complessiva subìta in n riflessioni è

$$p\pi - 2\Sigma i,$$

in cui p è la differenza algebrica tra il numero delle riflessioni positive (minuendo) e quello delle riflessioni negative (sottraendo) e ciascun i ha il

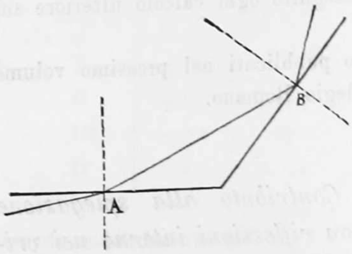

Fig. 1.

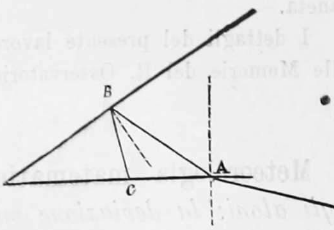

Fig. 2.

segno della corrispondente deviazione; infine la deviazione subìta nelle due rifrazioni estreme è

$$i - r \pm (i' - r')$$

in cui i è l'angolo di incidenza interna, r il relativo angolo di rifrazione, i' l'angolo di emergenza e r' il relativo angolo di incidenza interna, e va preso il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che l'ultimo angolo di incidenza possa produrre in una riflessione una deviazione positiva o negativa.

Dunque la deviazione totale è

$$D = i - r \pm \{i' - r'\} - 2\sum_{1}^{n} i_i + p\pi.$$

Introduciamo ora gli angoli dei poligoni. Nella successione di due deviazioni dello stesso segno e dagli angoli di incidenza rispettivamente i_1 e i_2 traverso l'angolo A (fig. 3) è

a) $$A = i_1 + i_2.$$

Nella successione invece di due deviazioni di segno contrario (fig. 4)

b) $$A = |i_2 - i_1|$$

per cui

$$D = i \pm i' + p\pi - \sum_{1}^{n+1} A .$$

in cui p ha il significato già detto, i' ha il segno $+$ o $-$ a seconda che la deviazione $< 90°$ che porterebbe il raggio emergente sulla normale alla faccia di uscita è negativa o positiva e la Σ va estesa a tutti gli angoli A traversati dal raggio, de' quali devono avere il segno $+$ quelli traversati nell'andare da una riflessione positiva a un'altra positiva, il segno $-$ quelli traversati nell'andare da una riflessione negativa a un'altra negativa, mentre quelli traversati nell'andare da una riflessione positiva a una negativa o viceversa hanno il segno della deviazione maggiore (per gli angoli estremi

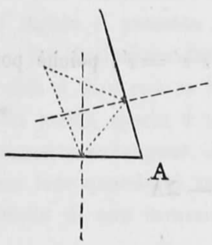

FIG. 3.

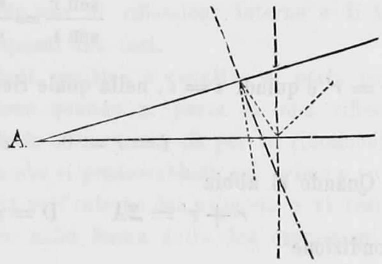

FIG. 4.

una delle riflessioni da considerare è quella che verrebbe prodotta in luogo della rifrazione).

D'altra parte si ha:

$$r \pm r' = \Sigma A_i$$

in cui A_1 ha il segno di r nell'espressione $A_1 = f(r, i_1)$ del tipo a) o b); A_i ha il segno opposto a quello dato dal prodotto dei segni di i_{i-1} nell'espressione $\sum_{1}^{i-1} A_s = f(r, i_{i-1})$ e nell'espressione di $A_i = f(i_{-1}, i_i)$.

Ora con le formole

$$r \pm r' = \Sigma_r A_r \tag{1}$$

$$i - \text{arcsen}(n \text{ sen } r) = 0 \tag{2}$$

$$i' - \text{arcsen}(n \text{ sen } r') = 0 \tag{3}$$

in cui n è l'indice di rifrazione,

$$D = i + i' + p\pi - \Sigma_s A_s \tag{4}$$

si giunge subito alla condizione di minimo col metodo ordinario dei moltiplicatori di Lagrange.

Così si ottiene che, perchè possa aversi una condizione di minimo, se è

$$D = i + i' + p\pi - \Sigma_s A_s$$

deve essere

$$r + r' = \Sigma_r A_r$$

e se è

$$D = i - i' + p\pi - \Sigma_s A_s$$

deve essere

$$r - r' = \Sigma_r A_r .$$

Allora la condizione di minimo è

$$\frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\cos r'}{\cos i'}$$

ed essa con

$$\frac{\operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} i} = \frac{\operatorname{sen} r'}{\operatorname{sen} i'}$$

dà $r = r'$ e quindi $i = i'$, nella quale rientra la $r = i \ r' = i'$, poichè porta seco

$$i = r = 0 \qquad i' = r' = 0 .$$

Quando si abbia

$$r + r' = \Sigma A \qquad D = i + i' + p\pi - \Sigma A$$

la condizione

$$r = r'$$

dà un vero e proprio minimo, mentre quando si abbia

$$r - r' = \Sigma A \qquad D = i - i' + p\pi - \Sigma A$$

la condizione

$$r = r'$$

per essere $\Sigma_r A_r =$ costante, o è $\Sigma_r A_r \neq 0$ e allora non si hanno soddisfatte le condizioni di minimo o è $\Sigma A = 0$ e allora si ha costantemente

$$D = p\pi - \Sigma A$$

e non si ha nessuna colorazione in un raggio bianco che abbia attraversato il poligono. Che infine si tratti proprio di un minimo e non di un massimo si ha del segno positivo della derivata seconda di D: consideriamo di fatti D, i, r, ad esempio come funzione di r' allora si ha

$$\frac{d^2 D}{dr'^2} = n \left\{ \frac{1}{\cos i} \left[- \operatorname{sen} r + \frac{n \cos^2 r}{\cos^2 i} \operatorname{sen} i \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\cos i'} \left[- \operatorname{sen} r' + \frac{n \cos^2 r'}{\cos^2 i'} \operatorname{sen} i' \right] \right\}$$

la quale relazione per $i = i'$ e $r = r'$ è positiva.

Abbiamo visto che se è

$$D = i + i' + p\pi - \Sigma A$$

deve essere, perchè si possa avere il minimo di deviazione,

$$r + r' = \Sigma A$$

mentre se è

$$D = i - i' + p\pi - \Sigma A$$

deve essere

$$r - r' = \Sigma A \equiv 0$$

nel primo caso si ha un vero e proprio minimo e il raggio se bianco all'entrata esce colorato dal cristallo, nel secondo si ha costantemente una determinata deviazione e il raggio esce dal cristallo ancora bianco; ebbene vediamo di determinare in quali condizioni di riflessioni interne e di uscita del raggio si presenta ciascuno di questi due casi.

La distinzione fatta di riflessioni positive e negative ci porta per comodità a dire che si ha un inversione quando si passa da una riflessione della prima specie a una della seconda o viceversa, sia per le riflessioni che realmente avvengono, sia per quelle che si produrrebbero sul primo o sull'ultimo lato quando il raggio fosse già nell'interno del poligono o vi restasse: l'effetto di una inversione è identico nella forma delle due espressioni

$$D = i + i' + p\pi - \Sigma_s A_s \quad r \pm r' = \Sigma_r A_r$$

che ci interessano.

Se non si ha nessuna inversione o un numero pari di esse si ha

$$D = i + i' + p\pi - \Sigma_s A_s$$

se si ha un numero dispari di inversioni si ha

$$D = i - i' + p\pi - \Sigma_s A_s$$

qualunque sia il numero delle riflessioni interne; dunque il numero delle riflessioni interne non ha nessun influsso sul segno di i' nell'espressione di D.

Se non si ha nessuna inversione o un numero pari di esse e il numero delle riflessioni interne è pari si ha

$$r + r' = \Sigma_r A_r$$

se invece è dispari si ha

$$r - r' = \Sigma_r A_r .$$

Se si ha un numero dispari di inversioni si ha

$$r + r' = \Sigma_r A_r$$

per un numero dispari di riflessioni e

$$r - r' = \Sigma_r A_r$$

per un numero pari; cioè se il numero delle riflessioni aumentato (o diminuito) di quello delle inversioni è pari si ha

$$r + r' = \Sigma_r A_r$$

se invece è dispari si ha

$$r - r' = \Sigma_r A_r .$$

Dunque possiamo concludere che:

Una deviazione minima si ha soltanto con un numero pari di riflessioni interne, se in tal caso il numero delle inversioni è pari si ha un vero e proprio minimo, mentre se è dispari si può avere una deviazione costante e il raggio resterà bianco all'uscita purchè sia altresì

$$r - r' = \Sigma A = 0 .$$

Esaminiamo ora più da vicino i due casi:

Se i' è negativo e si ha la deviazione costante, tale deviazione a meno di multipli di 2π è uguale all'angolo formato dal lato di entrata con quello di uscita.

Se i' è positivo, dalle formole che definiscono il minimo si ha

$$2i = \Sigma_s A_s - p\pi - D$$
$$2r = \Sigma_r A_r$$

e se ne traggono per

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\{\Sigma_s A_s - D\}$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}\Sigma_r A_r$$

le relazioni

$$\operatorname{sen} i = \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{p}{2}\pi\right)$$

$$\operatorname{sen} r = \operatorname{sen}\beta$$

donde la formola che lega gli A corrispondenti a un minimo con la deviazione relativa

$$\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{p}{2}\pi\right) = n \operatorname{sen}\beta$$

e poichè se a sono le riflessioni positive e b le negative per esser nel caso presente

$$a + b = 2k$$

deve essere anche

$$a - b = p = 2k_1 ,$$

la relazione data sopra diventa per

$$p = 4k$$

la

$$\operatorname{sen}\alpha = n \operatorname{sen}\beta$$

e per

$$p = 4k + 2$$

la

$$\operatorname{sen} \alpha = - n \operatorname{sen} \beta .$$

E si ha poi:

La deviazione minima, sempre per i' positiva, è uguale a meno di multipli di 2π al doppio dell'angolo di incidenza aumentato o diminuito dell'angolo formato dal lato di entrata con quello di uscita, a seconda che i due raggi, l'incidente e l'emergente si incontrano all'esterno o all'interno del quadrilatero formato dai due lati e dalle loro normali.

D'altra parte si può affermare:

Per avere un'inversione è necessario ma non sufficiente che l'angolo traversato sia $< 90°$, è necessario e sufficiente che detto angolo sia minore di uno degli angoli delle riflessioni sui suoi lati.

Stabilite così le relazioni e le norme generali sia per determinare tutte le deviazioni minime che può produrre un dato cristallo, sia per vedere se una data deviazione minima può esser prodotta da un dato cristallo, sia per definire entro certi limiti il cristallo che può dare una data deviazione, passiamo a un metodo per le condizioni di minimo, particolare sì, ma utile in molti casi.

Dalle condizioni

$$i = i' \qquad r = r'$$

segue che se i due lati di entrata e di uscita del raggio sono disposti simmetricamente rispetto ad un asse di simmetria di tutto il poligono, tutto il cammino del raggio dev'essere simmetrico rispetto allo stesso asse, e poichè il numero delle riflessioni dev'essere pari, il raggio dovrà attraversare normalmente questo asse. Dunque tracciando gli assi di simmetria del poligono e partendo dai segmenti normali ad essi e continuando il cammino da ambo le parti si hanno sempre minimi di deviazioni [1].

Per la spiegazione degli aloni il caso che importa di più è quello che presenta due sole riflessioni, poichè produce meno dispersione di luce: di esso quindi tratteremo diffusamente.

Se nessuna inversione si presenta nell'interno del cristallo sarà

$$D = i + i' + p\pi - \Sigma_s A_s$$

$$r + r' = \Sigma_r A_r$$

dunque si tratta di un vero e proprio minimo e ad esso corrisponde

$$D = 2i + 2\pi - (A_1 + A_2 + A_3)$$

mentre

$$r + r' = A_1 - A_2 + A_3 .$$

[1] Vedi Sella, Rend. Linc., vol. VII, 2° sem., pag. 300.

Se si presenta una inversione si ha

$$D = i - i' + p\pi - \Sigma_s A_s$$
$$r - r' = \Sigma_r A_r$$

e quando sia

$$r - r' = \Sigma_r A_r \equiv 0$$

sarà

$$D = p\pi - \Sigma A.$$

L'inversione può avvenire nell'andare alla prima riflessione, tra la prima e la seconda riflessione o dopo la seconda; nel primo caso si ha

$$D = -2\pi - [\pm A_1 - A_2 - A_3]$$

nel secondo

$$D = -[A_1 \pm A_2 - A_3]$$

nel terzo

$$D = 2\pi - [A_1 + A_2 \pm A_3].$$

Se si hanno due inversioni abbiamo ancora un vero e proprio minimo con la colorazione del raggio, e secondo che le due inversioni avvengano una prima della prima riflessione e una tra la prima e la seconda o tra la seconda e la terza oppure una tra la prima e la seconda e una dopo la seconda riflessione otteniamo le formole che seguono:

Nel primo caso è

$$D = 2i - [\pm A_1 \pm A_2 + A_3]$$

e

$$r = \tfrac{1}{2}[\pm A_1 \pm A_2 + A_3];$$

nel secondo è

$$D = 2i - 2\pi - [\pm A_1 - A_2 \pm A_3]$$

e

$$r = \tfrac{1}{2}[\pm A_1 \pm A_2 \pm A_3];$$

nel terzo è

$$D = 2i - [A_1 \pm A_2 \pm A_3]$$

e

$$r = \tfrac{1}{2}[A_1 \pm A_2 \pm A_3].$$

Se si hanno infine tre inversioni un caso solo può presentarsi, quello dato dalle formole

$$D = -[\pm A_1 \pm A_2 \pm A_3].$$
$$r = \tfrac{1}{2}[\pm A_1 \pm A_2 \pm A_3].$$

E passiamo da ultimo ad applicare le formole stabilite ad alcune delle forme cristalline usate dal Pernter [loc. cit.] per lo studio degli aloni; come abbiamo fatto sin qui continueremo a considerare i poligoni sezioni.

Il quadrato: gli angoli traversati dal raggio sono o di 90° o di 0° quindi nella condizione di minimo è

$$r = k\,45^\circ$$

con k uguale a 0, a 1, a 2 o a 3.

Allora

$$\operatorname{sen} r = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} r = 0.707 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} r = 1 .$$

E scartando l'ultimo caso, si ha o $i = 0$ o per $n = 1{,}307$ (indice di rifrazione del ghiaccio per il rosso)

$$i = 67^\circ 52'$$

e quindi

$$D = h\, 45^\circ 44' + l\, 90^\circ ,$$

in cui h è 1 o 0, e l è 0, 1, 2 o 3, e D è determinato a meno di 2π.

Ma trattiamo singolarmente i diversi casi.

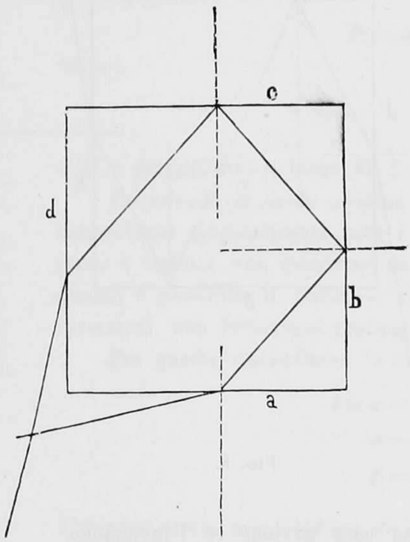

Fig. 5.

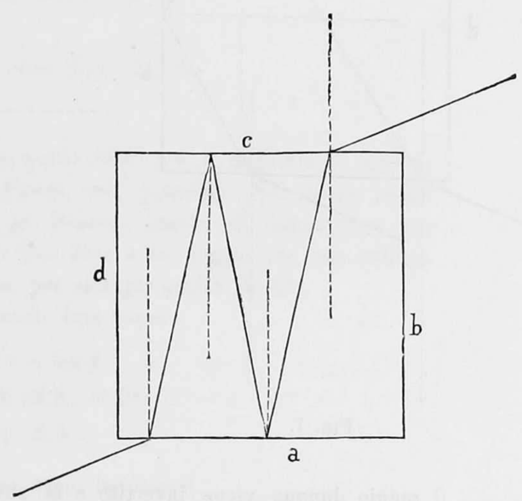

Fig. 6.

I due più semplici sono quelli corrispondenti alle figure 5 e 6, nella prima delle quali non si ha nessuna inversione e nella seconda 3.

Per il primo che dà un vero e proprio minimo si ha

$$r = 45^\circ$$

$$i = 67^\circ 52'$$

$$D = 135^\circ 44' + 2\pi - 3\,\frac{\pi}{2}$$

cioè

$$D = 225^\circ 44' ;$$

nel secondo si riconosce subito che non si ha nessuna deviazione (passaggio traverso una lamina a faccie piane e parallele).

Se si ha un' inversione possono darsi tre casi: che essa sia prima della prima riflessione, tra la prima e la seconda, o dopo la seconda riflessione: la figura 7 rappresenta il primo e il terzo a seconda che si segua il cammino del raggio da a a c o da a a b.

Se l' inversione è prima della prima riflessione si ha

$$r = r'$$

quindi raggio bianco, ma

$$D = -2\pi - \pi = -3\pi,$$

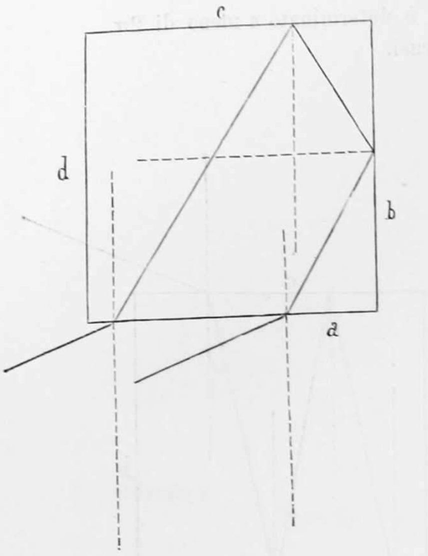

FIG. 7.

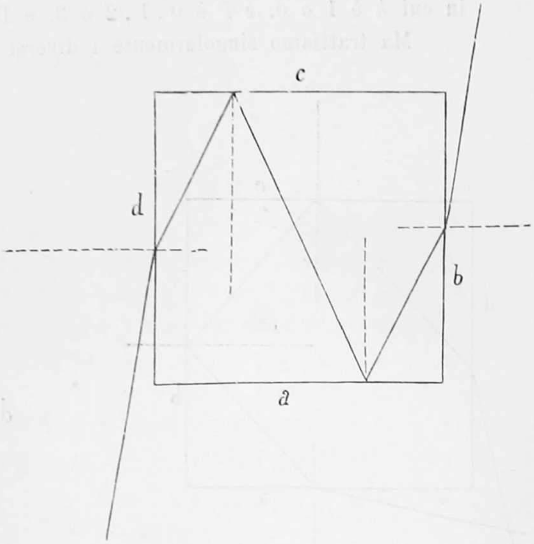

FIG. 8.

il raggio dunque viene invertito e la stessa cosa avviene se l' inversione è dopo la seconda riflessione.

Se invece l' inversione avviene tra le due riflessioni, figura 8, si ha

$$r = r'$$

e quindi raggio bianco, ma

$$D = 0$$

e nessuna deviazione.

Se si hanno due deviazioni si può presentare il solo caso della figura 9 cioè dell' inversione tra le due riflessioni e una precedente o seguente, allora si ha al minimo

$$r = 45$$

e quindi

$$i = 67° 52'$$

e si ha il raggio colorato con la deviazione

$$D = 45°\,44'.$$

2°. *L'esagono.*

Gli angoli che possono venir attraversati dal raggio sono di 0° 60° 120°, quindi si ha per il minimo

$$r = k\,30\,,$$

in cui k può essere $0\,,1\,,2\,,\ldots\,,5$.

Donde per i i soli valori

$$i = 0$$
$$i = 40°\,48',$$

e

$$D = h\,81°\,36' + l\,60°$$

in cui

$$h = 0{,}1 \qquad l = 0\,,1\,,2\ldots5\,,$$

e D è determinato a meno di 2π.

Procedendo in modo analogo a quello fatto per il quadrato si possono determinare singolarmente tutti i diversi casi possibili. Noi invece passeremo a trattare una questione un po' diversa: quella di determinare per quanto è possibile il triangolo che può dare a un raggio che non subisca inversioni, una deviazione qualunque, per esempio quella di 36°.

Per questo riprendiamo le formole date sopra

$$\text{sen}\,\alpha = \pm\, n\,\text{sen}\,\beta$$
$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,\{\Sigma_s A_s - D\}$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}\,\{\Sigma_r A_r\}\,.$$

Abbiamo subito per l'ipotesi di non avere inversioni

$$\Sigma_s A_s = A_1 + A_2 + A_3$$
$$\Sigma_r A_r = A_1 + A_3 - A_2\,,$$

e poichè abbiamo posto la condizione che la figura sezione sia triangolare

$$\Sigma_s A_s = 180$$
$$\Sigma_r A_r = 180 - 2A_2\,,$$

per cui

$$\alpha = 90 - 18°$$
$$\beta = 90 - A_2$$

e la relazione data sopra diviene

$$\cos 18° = \pm\, n \cos A_2$$

donde per $n = 1.307$

$$A_2 = 43^o.3$$
$$A_2 = 136^o.7$$

La condizione

$$2r = A_1 + A_3 - A_2$$

esclude la seconda soluzione e resta

$$A_2 = 43^o.3$$

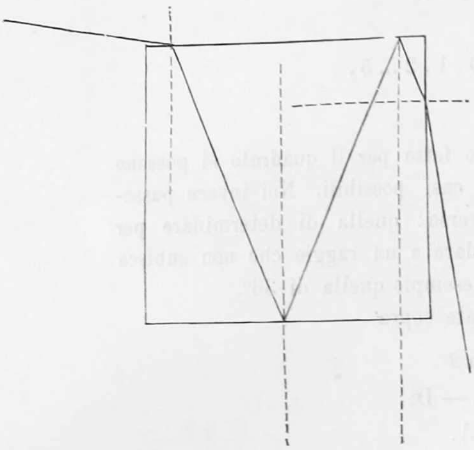

Fig. 9.

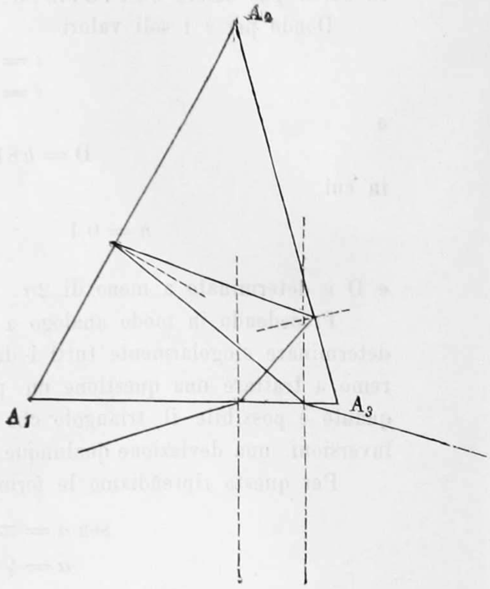

Fig. 10.

alla quale corrisponde

$$r = 46^o.7$$

e per

$$n = 1.307$$

si ha

$$i = 72^o.0\,;$$

nessuna condizione si ha per i due angoli A_1 e A_3 oltre alla

$$A_1 + A_3 = 180^o - A_2 = 93^o,4\,.$$

Se poniamo

$$A_1 = 60^o.2$$

e quindi

$$A_3 = 73^o.1$$

il raggio segue il cammino della figura 10.

Alcune delle relazioni trovate per questo caso particolare valgono in generale e si hanno le seguenti proposizioni:

In un triangolo la deviazione del raggio per due riflessioni senza inversione è legata all'angolo traversato tra le due riflessioni dalla relazione

$$\cos \frac{D}{2} = \pm n \cos A_2 .$$

Perchè non si abbiano inversioni è necessario che sia

$$A_2 < 90$$

per la relazione

$$2r = A_1 + A_3 - A_2$$

che dà

$$r = 90 - A_2 .$$

La deviazione è uguale al supplemento dell'angolo di incidenza.

Si potrebbero dedurre altre conseguenze dalle formole date per i diversi casi particolari, analogamente al triangolo, e anche per il triangolo stesso, ma il farlo qui è inutile perchè si presenteranno pressochè spontanee nelle diverse applicazioni.

Fisica. — *Variazione di resistenza dei metalli nel campo magnetico* (1). Nota del dott. NICOLA DAGOSTINO, presentata dal Corrispondente M. CANTONE.

Dietro le ricerche di Thomson, Beetz, De Lucchi, Goldhammer e Cantone sulla variazione di resistenza di fili o lamine di ferro o nichel, messi nel campo magnetico, sembrò quasi assodato, sebbene qualche altro sperimentatore dissentisse, che quando la corrente attraversa i fili o le lamine parallelamente alle linee di forza, la resistenza di essi aumenta, mentre diminuisce, quando l'attraversa normalmente.

Però i signori Leo Grunmach e Franz Weidert, che ultimamente hanno studiato il fenomeno, hanno trovato per i fili di ferro e nichel, messi in posizione trasversale, ossia normale alle linee di forza del campo magnetico, col crescere di esso campo, prima aumento di resistenza, che varia per i diversi fili da essi adoperati ed è grande per il ferro e minimo per il nichel, e poi diminuzione.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Napoli.