ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCV.
1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI
1908

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 maggio 1908.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica — *Sugli spostamenti elastici discontinui.* Nota del Corrispondente Gian Antonio Maggi.

L'insegnamento di Fisica Matematica del corrente anno avendomi dato occasione di ritornare sull'argomento degli spostamenti elastici discontinui, che, in una precedente Comunicazione (¹), io indicavo come interpretazione concreta degli spostamenti polidromi di Volterra, e sulla questione della duplice rappresentazione di elementi fisico-matematici mediante funzioni discontinue e funzioni polidrome, in rapporto di mutua connessione, mi permetto di render noti, con quest'altra breve Comunicazione, i punti principali della mia esposizione.

1. Dopo gli spostamenti continui, esclusivamente considerati, di regola, nella teoria dell'equilibrio elastico, si offrono al nostro studio gli spostamenti discontinui, dei quali l'esperienza fornisce ovvî esempî, e, fra questi, come specie più semplice, spostamenti, che presentino, a certe superficie, discontinuità di prima specie, ma corrispondano tuttavia a parametri di dilatazione (²), e, per conseguenza, a parametri di pressione (²), regolari,

(¹) V. questi Rendiconti, fasc. del 5 nov. 1905.

(²) Chiamo parametri di dilatazione, e parametri di pressione, le sei quantità che altri chiamano componenti, caratteristiche ecc. rispettivamente di dilatazione, o di deformazione, e di pressione o tensione. Il termine di parametri non mi sembra inopportuno, perchè queste quantità, variabili bensì da punto a punto, fungono da costanti nell'esame di una particella infinitesimale circostante al punto, le prime sotto l'aspetto cinematico (*strain* o deformazione), le seconde sotto l'aspetto dinamico (*stress* o tensione).

per modo che, malgrado lo strappo, rappresentato dalla discontinuità degli spostamenti alla supposta superficie, gli elementi di dilatazione, o di deformazione, e le tensioni interne, restino distribuiti con continuità nel corpo considerato. È la specie di spostamenti elastici su cui richiamò pel primo l'attenzione Weingarten [1], per farne oggetto principalmente di ricerche geometriche. Io muovo dallo stesso concetto, per trattare, innanzi tutto, la questione della possibilità degli spostamenti medesimi.

2. Avverto ch' io intendo la considerata posizione d'equilibrio elastico del supposto corpo determinata mediante un corrispondente spostamento da una posizione naturale, con che lo spostamento d'ogni particella infinitesimale riesce composto, nel noto modo, da un certo spostamento rigido, e da un certo spostamento dilatorio, aventi per origine la posizione naturale della particella. Immaginiamo, ciò premesso, per ogni punto (x, y, z) del campo rappresentante la posizione naturale, o di riferimento, del corpo elastico considerato, i parametri di dilatazione, e siano queste funzioni regolari [2] dello stesso punto. È noto che essi dovranno soddisfare alle così dette equazioni di Saint Venant [3]: in virtù delle quali, mediante le loro derivate prime, si potranno assegnare, pel considerato punto generico (x, y, z), i differenziali totali (esatti)

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} dp = p_1 dx + p_2 dy + p_3 dz \\ dq = q_1 dx + q_2 dy + q_3 dz \\ dr = r_1 dx + r_2 dy + r_3 dz \end{cases}$$

delle componenti p, q, r della rotazione relativa allo stesso punto (x, y, z). In seguito a che, concepite formate le p, q, r, coll'aiuto di queste, e dei suddetti parametri di dilatazione, si potranno ancora assegnare, pel considerato punto (x, y, z), i differenziali totali (esatti)

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} d\xi = \xi_1 dx + \xi_2 dy + \xi_3 dz \\ d\eta = \eta_1 dx + \eta_2 dy + \eta_3 dz \\ d\zeta = \zeta_1 dx + \zeta_2 dy + \zeta_3 dz \end{cases}$$

delle componenti ξ, η, ζ dello spostamento relativo al punto medesimo.

Ciò premesso, sia, in primo luogo, il campo rappresentante il corpo semplicemente connesso. Allora, per ogni cammino rientrante C, le (1) forniscono

$$\int_C (p_1 dz + p_2 dy + p_3 dz) = 0:$$

ecc.

[1] V. questi Rendiconti, fasc. del 3 febbraio 1901.

[2] Uniformi, continue, finite e dotate di derivate simili fino all'ordine che occorre di considerare. Nel presente caso questo è il secondo.

[3] V. per esempio Marcolongo, *Teoria dell'equilibrio dei corpi elastici*. Milano, Hoepli, 1904, cap. III, § 6.

con che la p, q, r riescono, nello stesso campo, funzioni regolari dei relativi punti. Concependo introdotte queste funzioni nelle (2), esse forniscono, alla lor volta,

$$\int_C (\xi_1 dx + \xi_2 dy + \xi_3 dz) = 0 :$$

ecc.

con che anche le ξ, η, ζ riescono funzioni regolari. Se ne conclude che, se il corpo è rappresentato da un campo semplicemente connesso, a parametri di dilatazione regolari non possono altrimenti corrispondere che spostamenti regolari: e, per conseguenza, non sono possibili spostamenti della specie considerata. Questa proposizione, accennata da Weingarten [1], si riduce all'analogo teorema di Volterra per gli spostamenti polidromi [2].

Supposto invece il campo molteplicemente connesso, la (1), per ogni sistema di cammini semplici non appartenenti a circuiti che formano il contorno completo di una calotta compresa nel campo, ma formano a due a due il contorno di una zona compresa nel campo (cammini riducibili l'uno all'altro) forniscono

$$\begin{aligned} &\int_C (p_1 dx + p_2 dy + p_3 dz) = \Delta p \\ (3) \qquad &\int_C (q_1 dx + q_2 dy + q_3 dz) = \Delta q \\ &\int_C (r_1 dx + r_2 dy + r_3 dz) = \Delta r, \end{aligned}$$

dove Δp, Δq, Δr indicano costanti dipendenti dal sistema di cammini, che dovranno supporsi generalmente non nulle. Così le p, q, r potranno essere rappresentate formalmente da funzioni polidrome, aventi uno o più moduli fondamentali di periodicità, a seconda dell'ordine di molteplicità di connessione del campo. Ma il significato meccanico delle stesse p, q, r — quello cioè di componenti della rotazione relativa al punto (x, y, z) — non sembra consentire che, per ogni punto del campo, tendendovi per cammini diversi, che partono da un punto, in cui si assuma un certo valore come valore iniziale, possano ottenersi limiti diversi, mentre consente che questa circostanza si verifichi per certi punti, che fungeranno da punti di discontinuità della rotazione. D'altra parte, se immaginiamo ridotto il campo semplicemente connesso, mediante diaframmi intersecanti i singoli sistemi fondamentali di circuiti fra loro riducibili, nel nuovo campo le p, q, r riesciranno definite come funzioni uniformi e discontinue, presentando ad ogni diaframma una discontinuità di prima specie, caratterizzata, conformemente alla (3) dalle

(1) Loc. cit.
(2) V. questi Rendiconti, fasc. del 5 febbraio 1905.

differenze Δp, Δq, Δr dei limiti, col tendere ad un punto qualunque del diaframma, dalle due opposte parti. Risulta bensì che la sede d'ogni strappo si può concepire spostata a piacere, insieme col corrispondente diaframma, lungo i relativi circuiti. Ma ciò non vuol dire che si possa prescindere dalla loro esistenza, per l'interpretazione meccanica del caso in discorso. Vuol dire che i supposti parametri di dilatazione convengono ad infiniti problemi, che si deducono l'uno dall'altro collo spostare, nell'indicato modo, le sedi della discontinuità.

Nel campo ridotto semplicemente connesso, ove, in ogni diaframma si distinguano le due pagine come parti distinte del contorno, si può operare sulle p, q, r come sopra funzioni regolari. Con ciò le (2) forniranno, per ogni sistema di cammini semplici, aventi gli estremi nei punti corrispondenti delle due opposte pagine di uno stesso diaframma,

$$\int_C (\xi_1 dx + \xi_2 dy + \xi_3 dz) = \Delta\xi$$
$$\int_C (\eta_1 dx + \eta_2 dy + \eta_3 dz) = \Delta\eta$$
$$\int_C (\zeta_1 dx + \zeta_2 dy + \zeta_3 dz) = \Delta\zeta ,$$

dove le $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ indicano tre costanti relative al diaframma.

La continuità dei parametri di dilatazione richiedendo poi che sia

$$\Delta x_x = 0 , \dots , \Delta y_z = 0 , \dots ,$$

se ne ricava

$$\begin{aligned}
\Delta\xi &= \Delta a + (z - z_0)\,\Delta q - (y - y_0)\,\Delta z , \\
\Delta\eta &= \Delta b + (x - x_1)\,\Delta r - (z - z_0)\,\Delta p , \\
\Delta\zeta &= \Delta c + (y - y_0)\,\Delta p - (x - x_0)\,\Delta q .
\end{aligned}$$

dove Δp, Δq, Δr hanno il precedente significato, e Δa, Δb, Δc sono nuove costanti.

Così, alle stesse sedi di prima, si ritrova una discontinuità per lo spostamento, e questa discontinuità è rappresentata da uno spostamento rigido [1]. E, con questa particolarità, riesce dimostrata la possibilità di spostamenti della specie considerata in un corpo rappresentato da un campo molteplicemente connesso: ciò che si riduce ancora all'analogo teorema di Volterra per gli spostamenti polidromi [2].

Colle trovate funzioni uniformi e discontinue si possono poi subito formare corrispondenti funzioni polidrome e continue, che soddisfanno egualmente le (2): e così si risale agli spostamenti polidromi di Volterra. Queste

[1] V. le citate Note di Weingarten e di Volterra.
[2] Loc. cit.

funzioni hanno la qualità di non implicare i diaframmi. Ma, per quanto al loro ufficio per rappresentare lo spostamento, colla indicata posizione del problema, come per la mutabile posizione dei diaframmi, cioè delle sedi di discontinuità degli spostamenti uniformi, valgono le considerazioni fatte precedentemente a proposito della rotazione.

3. Mi permetto ancora di aggiungere le seguenti osservazioni, che riguardano la discussione dei rapporti fra la polidromia e la discontinuità.

Posto:

$$V = -\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma ,$$

dove σ indica una superficie regolare avente un certo contorno, n la normale nel suo punto generico volta in un certo senso e r la distanza di questo punto ad un certo punto, preso fuori dalla superficie, P, di coordinate x, y, z,

$$dL = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} \partial y + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

rappresenta il differenziale del lavoro corrispondente ad un movimento di un polo magnetico, d'intensità unitaria, posto in P, egualmente per la forza esercitata da uno strato magnetico, avente per sede la superficie σ, e momento magnetico specifico orientato come n, di grandezza unitaria, e per la forza esercitata da una corrente elettrica, circolante nella linea rappresentata dal contorno di σ, nel senso positivo rispetto alla normale n, e d'intensità unitaria. Per ogni cammino rientrante semplice, C, appartenente ad un circuito concatenato colla suddetta linea, in senso concorde con quello della normale n, si ha

$$\int_C \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = 4\pi :$$

in base al quale risultato, L, lavoro corrispondente ad un cammino che conduce da un punto fisso P_0 al punto P, si può definire o come una funzione uniforme e discontinua della superficie σ, o come una funzione polidroma e continua nel campo molteplicemente connesso, che si ottiene dallo spazio, levandone il contorno di σ, i cui infiniti valori in P sono rappresentati da

$$\overline{L} + 4\nu\pi ,$$

indicando con $\overline{L}$ il valore in P della funzione uniforme e discontinua precedente, e con ν la differenza tra il numero dei giri nel senso di n e nel senso opposto, concatenati col contorno di σ, che fa il considerato cammino. Ora, *alla stregua del significato fisico*, si deve fare la prima o la seconda ipotesi, secondo che si tratta dello strato magnetico o della corrente elettrica.

In altri casi le due ipotesi si potranno assumere indifferentemente. Così Volterra, nella sua cospicua Memoria *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents* (¹), ha infirmato i risultati di Sofia Kovalevskij, concludendo che l'ipotesi di Lamé, che le vibrazioni luminose emanate da un sol centro, nei mezzi birefringenti, si propaghino per superficie d'onda, conduce ad espressioni delle vibrazioni medesime per funzioni polidrome, aventi le parallele agli assi ottici descritte pel centro per linee critiche. A codeste egli giunge passando per funzioni uniformi e discontinue sul piano di dette parallele, le quali si prestano ad analoghe conclusioni. Ora noterò, da ultimo, che questa discontinuità si può rilevare sui risultati stessi di Lamé, osservando che, su ogni falda della superficie d'onda, la vibrazione, in ogni punto, risulta avere ampiezza non nulla in alcun punto, la direzione della tangente alla intersezione sferica passante pel punto, e, ad ogni istante, per l'identità di fase, senso concorde per tutti i punti di una stessa intersezione sferica. Siccome ciascuna delle due metà, in cui una intersezione sferica è divisa dal piano delle parallele agli assi ottici condotte pel centro, col tendere a questo piano, tende ad un arco di cerchio posto nel piano medesimo, si vede che a vibrazioni appartenenti a punti posti dalle due opposte parti di detto piano, col tendere del relativo punto ad uno stesso punto del piano, competeranno limiti eguali e di senso contrario.

Matematica. — *Sui moduli delle superficie algebriche*. Nota del Corrispondente F. Enriques.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica — *Azioni chimiche della luce*. Nota XII del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Nelle nostre due ultime Note (²) intorno a questo argomento abbiamo descritto una serie di idrolisi di chetoni ciclici saturi, i quali tutti subiscono alla luce una doppia scissione: in un acido della serie grassa $C_n H_{2n} O_2$ ed in una corrispondente aldeide non satura $C_n H_{2n-2} O$. Conformemente al programma da noi annunciato nella Nota X, abbiamo continuato queste ricerche, estendendole ad alcuni chetoni ciclici non saturi, al *carvone* ed al *diidrocarvone*. Questi due composti hanno però alla luce un contegno assai differente: mentre l'ultimo si comporta in modo corrispondente agli altri ciclochetoni, il primo, cioè il carvone, non si idrolizza affatto, ma subisce invece una metamorfosi del tutto diversa.

(¹) Acta Mathematica. Tome 16.

(²) Questi Rendiconti, vol. 16, I, pag. 835 (1907) e vol. 17, I, pag. 179 (1908).