ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Partendo da 450 gr. di carvone, si ebbero 12 gr. dell'isomero canfoide dal p. f. 100° e 23 gr. di questo semicarbazone. Da ciò si calcola che dalla detta quantità di carvone si formarono circa 28 gr. dell'isomero solido che fonde a 100°.

I liquidi acetico ed alcoolico, in cui s'era formato e da cui venne fatto cristallizzare il suddetto semicarbazone, contengono, oltre a questo, in piccola quantità, un altro composto. Per ottenerlo, il primo venne neutralizzato con carbonato sodico ed assieme al secondo distillato con vapore acqueo. Il semicarbazone resta indietro, mentre passa un olio più leggiero dell'acqua, d'un odore di rose. Raccolto con etere e distillato, passò principalmente fra 218° e 223°. All'analisi dette però numeri che stanno fra le formule

$$C_{10}H_{16}O \quad \text{e} \quad C_{10}H_{18}O\,.$$

La piccola quantità di materia, soltanto 3 gr. circa, non permise un ulteriore studio di questo prodotto.

Da quanto abbiamo esposto risulta dunque che sono necessarie ulteriori ricerche per definire in modo esauriente le rimarchevoli metamorfosi del carvone alla luce; su queste ulteriori esperienze, che ci proponiamo di eseguire con maggior quantità di materia prima, speriamo di poter riferire il prossimo anno.

Per ultimo vogliamo aggiungere che, fedeli al programma che avevamo tracciato nella Nota X su questo argomento, abbiamo incominciato le annunciate esperienze sulla canfora e sul fencone, esperienze che promettono del pari di condurre a resultati assai rimarchevoli; di questi studî tratteremo quanto prima.

Anche questa volta ci è grato dovere ricordare l'aiuto efficace e diligente che ebbe a prestarci il dott. Mario Forni.

Matematica. — *Sulle due funzioni a più valori costituite dai limiti d'una variabile reale a destra e a sinistra di ciascun punto.* Nota di W. H. Young, Sc. D., F. R. S., presentata dal Socio Salvatore Pincherle.

1. La natura della discontinuità in un punto nel caso d'una funzione d'una variabile reale fu discussa con una certa estensione da Bettazzi [1]. In tale discussione egli si limita a considerare le varie possibilità rispetto ai limiti da una parte in punti particolari. Un confronto di questi limiti a sinistra e a destra dello stesso punto non viene fatto, e solo in un caso molto speciale c'è qualche confronto fra i valori limiti in un punto e il valore della funzione stessa nel punto medesimo (§ 10).

[1] R. Bettazzi, *Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale*, 1892, Rend. Gr. Mat. Pal. VI, pp. 173-195.

Nella mia Memoria letta l'anno scorso alla British Association a Leicester [1], io per il primo affrontai queste questioni. Il problema generale che ora sono riuscito a risolvere, *sino a qual grado sia possibile che i limiti a destra di un punto differiscano da quelli a sinistra*, non era allora proposto. Questo problema però ricevette una risposta preliminare, in quanto io provai che i limiti superiori a destra e a sinistra dello stesso punto coincidono, eccetto al più in un insieme numerabile di punti, e che lo stesso vale pei limiti inferiori. Adottando il punto di vista sinora in uso di classificare i punti di discontinuità secondo che tutti od alcuni di questi limiti estremi differiscono tra loro e dal valore della funzione nel punto, questo risultato era espresso nella forma seguente: *Non c'è distinzione di destra e sinistra nei punti di discontinuità, eccetto eventualmente in un insieme numerabile di punti.* Mi propongo ora di dimostrare che ciò può intendersi nel senso più generale che, eccettuato eventualmente un insieme numerabile di punti, tutti i limiti da una parte sono anche limiti dall'altra. In altri termini, considerando i limiti da una parte di un punto come i valori in questo punto di una certa funzione a più valori, e così dall'altra parte, queste due funzioni possono differire solo in un insieme numerabile di punti.

2. In un punto qualunque P denoti $F_L(P)$ uno dei valori a cui tende come limite la funzione ad un valore $f(x)$ quando x si avvicina a P come punto limite dalla sinistra. In corrispondenza al punto P avremo allora, in generale, un insieme di valori di $F_L(P)$, che, come si vede facilmente, è chiuso. Così il simbolo $F_L(x)$ deve riguardarsi come rappresentante una funzione di x che ha più valori in ogni punto P. Così definiamo la funzione a più valori $F_R(x)$, scambiando « destra » e « sinistra ».

Il limite superiore dei valori di $F_L(P)$ in P è il valore della *funzione associata limite superiore a sinistra* $\varphi_L(P)$, e il limite inferiore è il valore della *funzione associata limite inferiore a sinistra* $\psi_L(P)$. Similmente a destra abbiamo $\varphi_R(P)$ e $\psi_R(P)$. Le proprietà caratteristiche di queste funzioni formano l'oggetto del lavoro già citato, e in particolare vi si dimostra che φ_L e ψ_L differiscono di φ_R e ψ_R al più in un insieme numerabile di punti. Mi propongo ora di dimostrare il teorema più generale, *che le funzioni a più valori* $F_L(x)$, $F_R(x)$ *possono differire solo in un insieme numerabile di punti.*

3. A tal scopo suddivido i valori della funzione a più valori a destra come segue. $F_L(P)$ sia uno qualunque dei valori della funzione a più valori a sinistra nel punto P, diverso da $\varphi_L(P)$ e $\psi_L(P)$. Ciò determina due dei valori della funzione a più valori a destra, p. es. $G_R(P)$ e $H_R(P)$, che pos-

[1] W. H. Young, *Some results in the theory of functions of a real variable*, 1907, Report of the Brit. As. (estratto); *On the distinction of right and left at points of discontinuity*, 1907, Quarterly Journal of Math.

sono naturalmente coincidere, definiti come i più prossimi di tali valori al valore $F_L(P)$ considerato, e tali che:

$$G_R(P) \leq F_L(P) \leq H_R(P).$$

Sia k una quantità positiva scelta comunque, n un intero qualunque, e sia S l'insieme dei punti tali che, se P è un punto qualunque di S, vi è un valore $F_L(P)$ della funzione a più valori $F_L(x)$ in P tale che

$$G_R(P) + k < F_L(P) < H_R(P) - k, \tag{1}$$

e nello stesso tempo

$$-n < F_L(P) < n. \tag{2}$$

Dimostro che S è numerabile. Ne segue che l'insieme limite esterno di tutti gli insiemi S per tutti gli interi positivi n è pure numerabile. Siccome $\psi_L(P) < F_L(P) < \varphi_L(P)$, sicchè $F_L(P)$ è finito, questo insieme non è altro che l'insieme di tutti i punti per cui sussiste la (1). Si ha inoltre che anche l'insieme limite esterno di questi insiemi per tutti i valori $k_1, k_2, \ldots$ di una successione decrescente e tendente a zero è numerabile; ma questo non è altro che l'insieme di tutti i punti P in cui c'è un valore $F_L(P)$ che differisce dai corrispondenti $G_R(P)$ e $H_R(P)$. Combinando ciò col risultato che $\varphi_L = \varphi_R$, $\psi_L = \psi_R$ eccetto in un insieme numerabile di punti, resta provato il teorema enunciato, cioè che $F_L(x)$ differisce da $F_R(x)$ solo in un insieme numerabile di punti.

4. Supponiamo ora, se è possibile, che S non sia numerabile, e quindi (per un lemma dimostrato nel mio lavoro citato innanzi) che abbia un componente U concentrato da ambe le parti e più che numerabile in ogni intervallo contenente uno dei suoi punti.

Sia P un punto di U. Allora, poichè P è limite di punti di U posti a destra di P, c'è una successione di punti di U avente P come limite a sinistra, in ciascuno dei quali, per la definizione dell'insieme S

$$-n < F_L(x) < n. \tag{3}$$

Ora, poichè F_L è definita essa stessa come limite di $f(x)$, ogni limite di $F_L(x)$ per x tendente a P è limite di $f(x)$, e quindi non sta fra $G_R(P)$ ed $H_R(P)$, giacchè per la definizione di queste quantità nessun limite di $f(x)$ a destra di P sta fra esse. Perciò o si ha

$$H_R(P) \leq n, \tag{4}$$

oppure

$$-n \leq G_R(P). \tag{5}$$

Di qui, per le (1), (2), segue o

$$-n < F_L(P) < n - k, \tag{6}$$

oppure

$$-n + k < F_L(P) < n. \tag{7}$$

Dunque in ogni punto P di U deve sussistere almeno una delle diseguaglianze (6), (7).

Se consideriamo i due insiemi di punti di U in cui ha luogo una di queste diseguaglianze, questi due insiemi, che possono naturalmente avere punti comuni, compongono l'insieme U. Perciò, se essi fossero ambidue numerabili, lo sarebbe anche U. Quindi, se la nostra ipotesi è vera, uno almeno di questi insiemi è più che numerabile, e perciò, per la stessa ragione di prima, contiene un componente U_1 concentrato da ambe le parti e più che numerabile in ogni intervallo contenente uno dei suoi punti.

Confrontando le diseguaglianze (6), (7) colle (2), vediamo che il campo di variazione di questi valori F(P) che soddisfanno alla (1) è ridotto da $2n$ a $2n-k$, ossia — come può dirsi usando la parola « oscillazione » in senso esteso, giacchè $F_L(P)$ non è una funzione ad un valore — l'oscillazione di $F_L(P)$ nell'insieme U_1 è minore di $2n-k$, mentre in U si sa solo che è minore di $2n$.

L'« oscillazione » così definita è per la sua stessa natura una quantità positiva o nulla se l'insieme dei punti P considerati contiene qualche punto. Ma è chiaro che, ripetendo per U_1 il processo applicato ad U, otterremo un insieme U_2 della stessa natura, in cui l'oscillazione di $F_L(x)$ sarà minore di $2n-2k$, poi un insieme U_3 in cui sarà minore di $2n-3k$, ecc.; sicchè avremo infine un insieme U_i in cui l'oscillazione sarà negativa, il che è in contraddizione col fatto che U_i è più che numerabile. Così l'ipotesi primitiva che S non sia numerabile è inammissibile, ciò che prova il risultato voluto.

5. È da notarsi che nella dimostrazione precedente non si è supposto che la funzione ad un valore $f(x)$ sia limitata, od anche solo finita. L'artificio di omettere i limiti superiore e inferiore in ogni punto bastò per assicurarci che $F_L(x)$ è finita dappertutto e quindi in ogni punto x sta fra $-n$ ed n per un certo valoredell'intero positivo n dipendentemente da x. Per completare la dimostrazione si dovette far uso del risultato precedentemente stabilito, che φ_L, ψ_L differiscono da φ_R, ψ_R al più in un insieme numerabile di punti. Per l'importanza del teorema, ne diamo, per il caso in cui $f(x)$ è una funzione limitata, un'altra dimostrazione non fondata su quel risultato.

In questa dimostrazione $F_L(P)$ denota *qualunque* limite di $f(x)$ a sinistra di P, compresi i limiti superiore e inferiore di questi limiti, e noi consideriamo l'insieme S dei punti P tali che vi è un valore $F_L(P)$ per cui

$$G_R(P)+k<F_L(P)<H_R(P)-k. \tag{1}$$

Se S non è numerabile, contiene un componente U concentrato da ambe le parti e più che numerabile, in ogni punto del quale ha luogo la (1). Quindi, per la definizione del limite a des;ra di P, può trovarsi un intervallo d_1

avente P come estremo di sinistra e tale che per tutti i punti x interni ad esso sia o

$$f(x) < \mathrm{G_B(P)} + \tfrac{1}{2} k < \mathrm{F_L(P)} - \tfrac{1}{2} k, \tag{2}$$

oppure

$$\mathrm{F_L(P)} + \tfrac{1}{2} k < \mathrm{H_B(P)} - \tfrac{1}{2} k < f(x). \tag{3}$$

Poichè U è concentrato da ambe le parti, questo intervallo d_1 contiene punti interni appartenenti ad U, in ognuno dei quali, per le (2), (3), o si ha

$$\mathrm{F_L}(x) < \mathrm{F_L(P)} - \tfrac{1}{2} k, \tag{4}$$

oppure

$$\mathrm{F_L(P)} + \tfrac{1}{2} k < \mathrm{F_L}(x). \tag{5}$$

Così, se la (4) non sussiste in tutti i punti di U posti nell'intervallo d_1, può trovarsi in d_1 un punto $\mathrm{P_1}$ di U tale che

$$\mathrm{F_L(P)} + \tfrac{1}{2} k < \mathrm{F_L(P_1)}. \tag{6}$$

Applicando a $\mathrm{P_1}$ lo stesso ragionamento fatto per P, o troviamo un intervallo d_2 contenente punti di U in ognuno dei quali

$$\mathrm{F_L}(x) < \mathrm{F_L(P_1)} - \tfrac{1}{2} k < \mathrm{F_L(P)} - k, \tag{7}$$

oppure troviamo un punto $\mathrm{P_2}$ di U tale che

$$\mathrm{F_L(P)} + k < \mathrm{F_L(P_1)} + \tfrac{1}{2} k < \mathrm{F_L(P_2)}. \tag{8}$$

Questo processo può ripetersi indefinitamente; ma, la funzione ad un valore $f(x)$ essendo limitata, lo è anche $\mathrm{F_L}(x)$, e quindi c'è un intero massimo determinato n tale che è possibile trovare un punto per cui

$$\mathrm{F_L(P)} + \tfrac{1}{2} nk < \mathrm{F_L}(x).$$

Il ragionamento usato mostra dunque, che dopo $n+1$ passaggi al più troveremo un intervallo d, contenente punti di U, per ognuno dei quali

$$\mathrm{F_L}(x) < \mathrm{F_L(P)} - \tfrac{1}{2}(n+1) k < \mathrm{F_L(P)} - \tfrac{1}{2} k. \tag{9}$$

Similmente, presso un punto Q dell'insieme U in questo intervallo d, troviamo, dopo un numero finito di passaggi, un intervallo d' entro d, contenente punti dell'insieme U, in ognuno dei quali

$$\mathrm{F_L}(x) < \mathrm{F_L(Q)} - \tfrac{1}{2} k < \mathrm{F_L(P)} - k. \tag{10}$$

Continuando così, dovremo trovare dopo un numero finito di passaggi un intervallo, contenente punti di U, in ognuno dei quali

$$\mathrm{F}(x) < \mathrm{F_L(P)} - \tfrac{1}{2}(n+1) k,$$

il che, come si è già detto, è impossibile. Dunque l'ipotesi primitiva che l'insieme S contenga un componente concentrato da ambe le parti è inammissibile, e S è numerabile.

Facendo percorrere a k una successione di valori positivi decrescenti e tendenti a zero $k_1, k_2, \ldots$, ne segue che l'insieme limite esterno di questi insiemi è pure numerabile. Ma questo insieme limite esterno consta, per definizione, di tutti i punti in cui c'è un limite $F_L(P)$ a sinistra che non è anche limite a destra, sicchè resta provato il teorema in questione se la funzione ad un valore $f(x)$ è limitata.

6. Si osservi che la dimostrazione precedente stabilisce incidentalmente che le funzioni associate superiori a destra e a sinistra φ_R, φ_L sono eguali eccetto eventualmente in un insieme numerabile di punti, e che lo stesso ha luogo per le funzioni associate inferiori a destra e a sinistra ψ_R, ψ_L. La dimostrazione precedente è infatti essenzialmente identica alla dimostrazione di quest'ultimo risultato esposta nel lavoro citato nel caso speciale in cui $f(x)$ è una funzione limitata.

Si deve pure notare, come nel lavoro precedente, che noi abbiamo effettivamente stabilito un risultato più dettagliato: cioè che, se $f(x)$ è limitata, i punti in cui qualche limite a destra differisce dal più prossimo limite a sinistra per più di k formano un insieme non avente alcun componente concentrato a destra almeno. Il fatto che U si suppone concentrato tanto a destra che a sinistra, non viene in realtà usato nella dimostrazione.

È appena necessario notare che l'insieme limite esterno d'una serie d'insiemi non contenenti alcun componente concentrato a destra, può contenere un componente concentrato a destra: sicchè non si è dimostrato che i punti in cui c'è una distinzione fra destra e sinistra formano un insieme non avente alcun componente concentrato a destra. Infatti questi punti possono essere densi dappertutto, e un esempio di una tale funzione $f(x)$ si trova nel lavoro già citato.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Socio V. Cerruti.

Noi qui vogliamo far vedere come l'integrazione di un'equazione differenziale lineare possa ridursi alla risoluzione (ben nota) di un'equazione integrale del tipo di Volterra, cioè

$$(1) \qquad y(x) = F(x) + \int_0^x k(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi\,,$$

dove y rappresenta la funzione incognita.

Per evitare un lungo e laborioso svolgimento, che sarà fatto in una prossima Memoria, noi vogliamo trattare un caso molto particolare, cioè