ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

l'insieme S contenga un componente concentrato da ambe le parti è inammissibile, e S è numerabile.

Facendo percorrere a k una successione di valori positivi decrescenti e tendenti a zero $k_1, k_2, \ldots$, ne segue che l'insieme limite esterno di questi insiemi è pure numerabile. Ma questo insieme limite esterno consta, per definizione, di tutti i punti in cui c'è un limite $F_L(P)$ a sinistra che non è anche limite a destra, sicchè resta provato il teorema in questione se la funzione ad un valore $f(x)$ è limitata.

6. Si osservi che la dimostrazione precedente stabilisce incidentalmente che le funzioni associate superiori a destra e a sinistra φ_R, φ_L sono eguali eccetto eventualmente in un insieme numerabile di punti, e che lo stesso ha luogo per le funzioni associate inferiori a destra e a sinistra ψ_R, ψ_L. La dimostrazione precedente è infatti essenzialmente identica alla dimostrazione di quest'ultimo risultato esposta nel lavoro citato nel caso speciale in cui $f(x)$ è una funzione limitata.

Si deve pure notare, come nel lavoro precedente, che noi abbiamo effettivamente stabilito un risultato più dettagliato: cioè che, se $f(x)$ è limitata, i punti in cui qualche limite a destra differisce dal più prossimo limite a sinistra per più di k formano un insieme non avente alcun componente concentrato a destra almeno. Il fatto che U si suppone concentrato tanto a destra che a sinistra, non viene in realtà usato nella dimostrazione.

È appena necessario notare che l'insieme limite esterno d'una serie d'insiemi non contenenti alcun componente concentrato a destra, può contenere un componente concentrato a destra: sicchè non si è dimostrato che i punti in cui c'è una distinzione fra destra e sinistra formano un insieme non avente alcun componente concentrato a destra. Infatti questi punti possono essere densi dappertutto, e un esempio di una tale funzione $f(x)$ si trova nel lavoro già citato.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Socio V. Cerruti.

Noi qui vogliamo far vedere come l'integrazione di un'equazione differenziale lineare possa ridursi alla risoluzione (ben nota) di un'equazione integrale del tipo di Volterra, cioè

$$(1) \qquad y(x) = F(x) + \int_0^x k(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi ,$$

dove y rappresenta la funzione incognita.

Per evitare un lungo e laborioso svolgimento, che sarà fatto in una prossima Memoria, noi vogliamo trattare un caso molto particolare, cioè quello relativo all'equazione di secondo ordine

$$y''(x) + A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) + C(x) = 0\,. \tag{2}$$

Scriviamo l'equazione integrale

$$y(x) = F(x) + \int_0^\infty [e^x p(\xi) + e^{-x} q(\xi)]\, y(\xi)\, d\xi\,, \tag{3}$$

e vediamo se ci è possibile determinare le funzioni p, q, F (a meno, bene inteso, di due costanti arbitrarie), in modo che la soluzione di (3) coincida coll'integrale di (2).

Nel caso dell'equazione lineare d'ordine n, avremmo, invece del $k(x, \xi)$ che figura nella (3), posto

$$k(x, \xi) = e^x p_0(\xi) + e^{\alpha x} p_1(\xi) + e^{\alpha^2 x} p_2(\xi) + \cdots + e^{\alpha^{n-1} x} p_{n-1}(\xi)\,,$$

rappresentando con α una radice primitiva n^{ma} dell'unità.

Per determinare p, q, F secondo l'intenzione dianzi espressa, incominciamo col derivare (3) rispetto ad x. Troviamo subito

$$\begin{aligned} y'(x) = F'(x) &+ \int_0^\infty [e^x p(\xi) - e^{-x} q(\xi)]\, y(\xi)\, d\xi \\ &+ [e^x p(x) + e^{-x} q(x)]\, y(x)\,. \end{aligned}$$

Derivando anche quest'equazione, troviamo

$$\begin{aligned} y''(x) = F''(x) &+ \int_0^\infty [e^x p(\xi) + e^{-x} q(\xi)]\, y(\xi)\, d\xi \\ &+ [e^x p(x) - e^{-x} q(x)]\, y(x) \\ &+ [e^x p(x) + e^x p'(x) - e^{-x} q(x) + e^{-x} q'(x)]\, y(x) \\ &+ [e^x p(x) + e^{-x} q(x)]\, y'(x)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Fra quest'equazione e la (3) noi possiamo agevolmente eliminare la grandezza $\int_0^\infty [e^x p(\xi) + e^{-x} q(\xi)]\, y(\xi)\, d\xi$, sostituendola con $y(x) - F(x)$; dunque la (4) si può scrivere

$$\begin{aligned} y''(x) = F''(x) + y(x) - F(x) &+ \{2\,[e^x p(x) - e^{-x} q(x)] \\ &+ e^x p'(x) + e^{-x} q'(x)\}\, y(x) + [e^x p(x) + e^{-x} q(x)]\, y'(x)\,. \end{aligned}$$

Ora poniamo

$$\left\{ \begin{aligned} -A(x) &= e^x p(x) + e^{-x} q(x) \\ -B(x) &= 1 + 2\,[e^x p(x) - e^{-x} q(x)] + e^x p'(x) + e^{-x} q'(x) \\ -C(x) &= F''(x) - F(x) \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Quest' ultima equazione (5) si sa integrare, dunque possiamo ritenere $F(x)$ come nota, *a meno beninteso di due costanti arbitrarie*, sulle quali abbiamo già posto attenzione.

Rimangono le altre due equazioni (5) per determinare p e q. La loro determinazione sarebbe alquanto scomoda se non supponessimo $A(x)$ derivabile: vogliamo supporre che $A(x)$ sia derivabile; e allora dalla prima (5), per derivazione, deduciamo

$$-A'(x) = e^{x}p(x) - e^{-x}q(x) + e^{x}p'(x) + e^{-x}q'(x). \tag{6}$$

Sostituendo nella seconda (5) il valore di $e^{x}p'(x) + e^{-x}q'(x)$ ricavato da quest'equazione (6), troviamo

$$-B(x) = 1 + e^{x}p(x) - e^{-x}q(x) - A'(x).$$

E allora, al posto delle prime due equazioni (5), possiamo scrivere queste due altre

$$\left\{\begin{array}{l} e^{x}p(x) + e^{-x}q(x) = -A(x) \\ e^{x}p(x) - e^{-x}q(x) = A'(x) - B(x) - 1\,. \end{array}\right. \tag{7}$$

Risolvendole, deduciamo

$$p(x) = \frac{1}{2e^{x}}\left[-A(x) + A'(x) - B(x) - 1\right]$$

$$q(x) = \frac{1}{2e^{-x}}\left[-A(x) - A'(x) + B(x) + 1\right];$$

e, sostituendo nella (3), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} y(x) = F(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \big\{ & e^{x-\xi}\left[-A(\xi) + A'(\xi) - B(\xi) - 1\right] \\ & + e^{\xi - x}\left[-A(\xi) - A'(\xi) + B(\xi) + 1\right]\big\}\, y(\xi)\, d\xi\,. \end{aligned} \tag{8}$$

La funzione $F(x)$ è nota, ma vi figurano due costanti arbitrarie, le quali figureranno anche nella soluzione y dell'equazione integrale (8).

Nel caso generale, le equazioni (7) sarebbero in numero di n, e il loro determinante sarebbe il determinante di Vandermonde-Cauchy, costituito colle potenze d' una radice primitiva n^{ma} dell' unità. Nelle espressioni di $p_0, p_1, \ldots$, figurerebbero: la derivata $(n-1)^{ma}$ di A, quella $(n-2)^{ma}$ di B, ecc.

Per risolvere speditamente la (8), oltre i metodi classici, si può facilmente adoperare un metodo che esposi a suo tempo nel mio corso libero di Fisica matematica nell' Università di Messina, e che ho recentemente presentato in una Comunicazione al Congresso di Matematica.