ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Maja squinado.

1) 21 gennaio 1908. — Sangue raccolto da un arto amputato di una grossa *Maja squinado*. Coagula subito. Si filtra. Filtrato limpidissimo, di colore verde-bluastro.

Temperatura	t
17°,94 C	1'.34''.$^1/_5$''
	1'34''
	1'.34''.$^1/_5$''
	1' 34''.$^1/_5$''

2) 21 gennaio 1908. — Altra grossa *Maja squinado*. Sangue raccolto da un arto amputato. Filtrato limpidissimo di colore verde-bluastro.

Temperatura	t
18°,04 C	1'.29''.$^2/_5$''
	1'.29''
	1'.29''
	1'.29''

La formazione della fibrina nel sangue di questo animale fu più scarsa.

3) 27 febbraio 1908. — Siero di sangue di *Maja squinado*, lasciato a coagulare spontaneamente per 16 ore, decantato, filtrato. Filtrato limpidissimo, di color verde-bluastro.

Temperatura	t
16°,38 C	1'.32''.$^3/_5$''
	1'.32''.$^3/_5$''
	1'.32''.$^3/_5$''
	1'.32''.$^3/_5$''

Matematica. — *Sul determinante di Wronski*. Nota del dottore L. Orlando, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Supponiamo che $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ siano funzioni reali della variabile reale x, e ammettano le derivate fino all'ordine $n-1$. Il determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

formato colle funzioni $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ e colle loro derivate fino all'ordine $n-1$, si suole chiamare determinante di Wronski, o semplicemente si chiama Wronskiano delle funzioni date.

Se le funzioni $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sono legate da una relazione lineare, cioè

(1) $$L(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0,$$

dove le grandezze λ sono non tutte zero, e sono indipendenti da x, allora, con $n-1$ derivazioni e con un richiamo ad un'elementare proprietà dei sistemi di equazioni lineari, si dimostra agevolmente che $W(x)$ rappresenta lo zero, in tutto l'intervallo nel quale la funzione $L(x)$ è nulla e le $y(x)$ sono derivabili nel modo anzidetto.

Viceversa, si domanda: se $W(x)$ rappresenta lo zero, esisterà fra le n funzioni $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ una relazione lineare del tipo (1), valida in tutto l'intervallo nel quale $W(x)$ rappresenta lo zero?

Si soleva rispondere affermativamente, non tanto per un vero e fondamentale errore, quanto per un'omissione: non si precisava cioè in quale intervallo si dovesse il teorema ritenere valido. Il prof. Peano [1], colla sua consueta acutezza, osservò che, senza aggiungere una nuova condizione, tale risposta affermativa non si poteva dare; e costruì l'esempio delle due funzioni

$$y_1(x) = x^2 \qquad y_2(x) = x|x|,$$

definite e derivabili per ogni x reale. Esse hanno il determinante di Wronski sempre uguale a zero, per ogni x reale; eppure non esiste una sola relazione lineare che le vincoli, tanto per x positivo quanto per x negativo: per x positivo è nulla la loro differenza, e per x negativo la loro somma. Ed il Peano stesso enunciò, dopo tale esempio, e dimostrò il teorema seguente: se in un intervallo è zero $W(x)$, *ma senza che esista nell'intervallo nessuna radice comune a tutti gli aggiunti dell'ultima linea orizzontale di questo determinante*, allora intercede fra le funzioni $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ una relazione del tipo (1), valida in tutto l'intervallo.

La difficoltà di ricercare se esistano radici comuni a tutti questi n aggiunti dell'ultima linea orizzontale di $W(x)$ getta un'ombra di sfiducia sopra un teorema che rende in analisi ottimi servizî; perciò vedremo se, pur riconoscendo l'esattezza dell'osservazione del Peano, non si possa diminuire la difficoltà da essa creata.

Dal modo stesso nel quale il prof. Peano dimostra il suo teorema, risulta che, in ogni intervallo nel quale non cadano radici comuni agli n aggiunti considerati, il teorema è valido. È ben facile vedere che, se tutti questi aggiunti non sono identicamente zero, nel quale caso ci ridurremmo a considerare soltanto $n-1$ fra le funzioni $y(x)$, allora deve esistere un intervallo, sia pure molto piccolo, che non ne contenga le radici. Ciò si vede subito, considerando che le $y(x)$ e le loro derivate fino all'ordine $n-2$ sono funzioni continue di x. E allora il teorema si potrebbe enunciare, rimanendo nelle considerazioni del Peano, nel modo seguente: se $W(x)$ è zero, esiste un intervallo nel quale intercede fra le funzioni $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ una relazione del tipo (1).

[1] *Sul determinante Wronskiano*. Rendiconti R. Accademia dei Lincei, vol. VI, 1897, 1° semestre, pag. 413.

Fin qui nulla di nuovo; ma, se consideriamo invece che nelle applicazioni del teorema in parola non si sogliono mai adoperare funzioni che possano annullarsi in un tratto continuo senza essere nulle in tutto il loro intervallo d'esistenza, allora vediamo subito che la funzione $L(x)$, uguale a zero nell'intervallo, sia pure piccolo, che non contiene radici dei suddetti minori, sarà uguale a zero in tutto il rimanente dell'intervallo nel quale esistono le y e la funzione W.

Da questo punto di vista, *escludendo cioè le funzioni così anomale che loro combinazioni razionali presentino, senza essere identicamente nulle, infinità continue di zeri*, noi possiamo alleggerire alquanto la dimostrazione del Peano, e quella riferita nel libro di Calcolo del Vivanti (¹).

Chiamiamo A_{rs} gli aggiunti degli elementi $y_s^{(r-1)}(x)$ del determinante $W(x)$. Derivando per linee A_{ns}, noi otteniamo $n-2$ determinanti nulli, e uno $=-A_{n-1s}$, dunque sarà $A'_{ns}=-A_{n-1s}$.

Noi supponiamo, come si è prima accennato, *che siasi già dimostrato il teorema fino all'ordine precedente*. E allora l'annullarsi di $W(x)$ ci lascia dedurre che la matrice

$$\begin{Vmatrix} A_{n-11} & A_{n-12} & \cdot & A_{n-1n} \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdot & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

o anche

$$\begin{Vmatrix} A'_{n1} & A'_{n2} & \ldots & A'_{nn} \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

è di caratteristica non superiore a 1.

Mettiamoci ora in un intervallo che eviti le radici di A_{n1}, quelle di A_{n2}, e di ogni altro aggiunto dell'ultima linea di $W(x)$. Esisterà un intervallo che le eviti? Certamente sì, perchè la funzione $A_{n1}\,A_{n2}\ldots A_{nn}$ della variabile x è continua ed è diversa da zero.

E allora deduciamo subito

$$\frac{A'_{n1}}{A_{n1}}=\frac{A'_{n2}}{A_{n2}}=\cdots=\frac{A'_{nn}}{A_{nn}},$$

cioè in generale

$$\frac{A'_{ns}\,A_{n1}-A'_{n1}\,A_{ns}}{A_{n1}^2}=0,$$

cioè $A_{ns}=A_{n1}\,k_s$, dove k_s è costante (²).

(¹) Pag. 118, § 114.

(²) Diversa evidentemente da zero. Se poi alcuna delle A risultasse identicamente nulla, ci troveremmo in un caso relativo a meno di n funzioni y, che supponiamo già discusso, e, come tale, non consideriamo.

Ma, per una proprietà ben nota dei determinanti, si può scrivere

$$A_{n1}\, y_1(x) + A_{n2}\, y_2(x) + \cdots + A_{nn}\, y_n(x) = 0$$

cioè

$$A_{n1}\,[y_1(x) + k_2\, y_2(x) + \cdots + k_n\, y_n(x)] = 0$$

dove le k sono costanti. Ma A_{n1} non è zero, dunque vale fra le $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ una relazione del tipo (1). Essa vale in un intervallo che non contenga nessuna radice di nessuna delle funzioni $A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn}$; ma, per la riserva dianzi fatta, essa vale anche in tutto l'intervallo d'esistenza delle funzioni $y(x)$ e delle loro derivate fino all'ordine $n-1$.

Chimica. — *Sui ferrinitrososolfuri* (1). Nota di Livio Cambi, presentata dal Socio G. Ciamician.

Proseguendo nello studio dei nitrososolfuri, nella direttiva tracciata dalle mie ricerche ed ipotesi, comunicate nelle mie Note precedenti, prima di pubblicare le indagini e alcune delle considerazioni che esporrò avrei atteso di avere un più copioso materiale di nuove esperienze; ma una Nota recente di I. Bellucci e P. Cesaris (2) rende necessaria questa mia comunicazione (3).

Il Bellucci eseguisce le mie scissioni (4) con solfato di argento ed acido solforico. e trova che per ogni ione $[Fe_4\,S_3\,(NO)_7]'$ si svolgono quattro molecole di NO ed una e mezzo di N_2O. Ma io ho dimostrato che occorrono altre tre valenze positive, fornite da un ossidante, affinchè si svolgano sette molecole di NO. Con il solfato di argento si svolgono miscele di biossido e di protossido di azoto: questo io l'avevo provato (5) e previsto. Facilmente dalla mia reazione I) $[Fe_4\,S_3(NO)_7]' + 3Fe^{\cdots} = 7Fe^{\cdot\cdot} + 7NO + 3\overset{II}{S}$ si deduceva, per quei casi in cui si formavano quattro ioni ferrosi sotto l'azione del solo solfato di argento (6), la reazione II) $[Fe_4\,S_3\,(NO)_7]' + 3H^{\cdot} = Fe^{\cdot\cdot} + 4NO + 1 + \frac{1}{2}\,N_2O + 1 + \frac{1}{2}\,H_2O + 3\overset{II}{S}$. E dal confronto di queste due

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Questi Rendiconti, vol. XVII, I, pag. 584.

(3) Questa mia Nota era già stata presentata, quando apparve una nuova comunicazione di Bellucci e De Cesaris (Questi Rend. pag. 545). Avevo già notato con piacere che Bellucci si occupava delle mie esperienze, e si serviva delle reazioni che io avevo studiato. Ora noto pure con piacere come egli ammetta che almeno alcuni gruppi nitrosilici possano fungere da residui alogenici; ma desidero porre in rilievo, che io per primo ho riconosciuto, sperimentalmente e teoricamente, la necessità di tale ipotesi.

(4) Questi Rendiconti, vol. XVI, II, pag. 546.

(5) Questi Rendiconti, vol. XVII, I, pagg. 205-206.

(6) Questi Rendiconti, vol. XVII, I, pag. 204.