ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Meccanica. — *Il problema di Lamé per i sistemi tripli conici.* Nota di O. TEDONE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Come complemento alla Comunicazione fatta al Congresso dei matematici, in Roma, sul problema di Lamé, esamino qui il problema stesso nel caso particolare di un sistema triplo, ortogonale, conico; di un sistema triplo, ortogonale, cioè, di cui una delle tre serie di superficie è costituita da un fascio di sfere concentriche, al quale caso può ridursi sempre, con una inversione, quello, più generale, di un sistema triplo ortogonale, di cui uno dei tre sistemi di superficie è costituito da un fascio di sfere avente in comune un cerchio immaginario. Nella Comunicazione accennata in principio mi sono occupato, invece, del caso di un sistema triplo di rotazione al quale può ridursi, con una inversione, quello, più generale, di un sistema triplo ortogonale, di cui una delle tre serie di superficie è costituito da un fascio di sfere avente in comune un cerchio reale. Quest'ultimo caso è stato spesso soggetto di studio, mentre il primo di cui ora vogliamo occuparci, per quello che mi consta, non è stato mai sufficentemente approfondito.

2. Scegliamo l'origine degli assi nel centro comune alle sfere che fan parte del nostro sistema triplo. Sieno x, y, z le coordinate cartesiane di un punto; x_1, y_1, z_1 quella della sfera di raggio uno, e ϱ il raggio variabile delle sfere stesse. Se allora indichiamo con θ la colatitudine e con φ la longitudine, sulla sfera di raggio uno, avremo:

$$x = \varrho x_1 = \varrho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \ , \ y = \varrho y_1 = \varrho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \ , \ z = \varrho z_1 = \varrho \cos\theta, \tag{1}$$

ed il quadrato dell'elemento lineare dello spazio sarà

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2). \tag{2}$$

Le linee $\theta = \text{cost}$, $\varphi = \text{cost}$ formano sulla sfera $\varrho = 1$ un sistema isotermo di cui i parametri isometrici sono, com'è noto:

$$u = \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \ , \ \varphi \tag{3}$$

e tutti gli altri sistemi isotermi su di essa si possono ottenere ponendo

$$e^{-u \pm i\varphi} = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\, e^{\pm i\varphi} = f(\alpha + i\beta) \, . \tag{4}$$

La relazione (4) può anche porsi sotto la forma

$$\frac{x_1 \pm i y_1}{1 - z_1} = f(\alpha + i\beta) \tag{4'}$$

ed è noto che il punto $x + iy = \dfrac{x_1 + iy_1}{1 - z_1}$, $z = 0$ è la proiezione stereografica del punto x_1, y_1, z_1 della sfera.

Il quadrato dell'elemento lineare dello spazio, espresso per mezzo delle coordinate curvilinee ϱ, α e β, assumerà la forma

$$(5)\qquad ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 h^2 (d\alpha^2 + d\beta^2)\ ,\ h^2 = 4\,\frac{f'(\alpha + i\beta)\, f'_0(\alpha - i\beta)}{[f(\alpha + i\beta)\, f_0(\alpha - i\beta) + 1]^2}\,,$$

dove f_0 è la funzione immaginaria coniugata di f. Invece della funzione $f_0(\alpha - i\beta)$ conviene, in questo problema, introdurre la funzione

$$(6)\qquad \Phi(\alpha - i\beta) = -\frac{1}{f_0(\alpha - i\beta)}\,,$$

che gode della proprietà di rappresentare, sulla sfera di raggio uno, il punto opposto di quello rappresentato da $f(\alpha + i\beta)$. Allora diventa

$$(5')\qquad h^2 = 4\,\frac{f'(\alpha + i\beta)\, \Phi'(\alpha - i\beta)}{[f(\alpha + i\beta) - \Phi(\alpha - i\beta)]^2}$$

e infine l'equazione di Laplace, trasformata nelle coordinate curvilinee ϱ, α e β, si scriverà

$$(7)\qquad h^2 \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial V}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} = 0\,.$$

3. Col solito procedimento [1], si trova che, se l'equazione (7) ammette soluzioni della forma P . R . A . B . dove R, A, B sono funzioni di ϱ, α e β rispettivamente, soddisfacenti ad equazioni lineari ordinarie del second'ordine, e P è una funzione determinata, si può sempre porre:

$$(8)\qquad P = 1\ ,\ \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{dR}{d\varrho}\right) = n(n+1)\,R\ ,\ \frac{d^2 A}{d\alpha^2} = \varphi_1(\alpha)\,A\ ,\ \frac{d^2 B}{d\beta^2} = \varphi_2(\beta)\,B\,,$$

dove n è una costante arbitraria e φ_1, φ_2 due opportune funzioni da determinarsi in modo che sia

$$(9)\qquad n(n+1)\,h^2 + \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta) = 0\,.$$

4. La determinazione di φ_1 e φ_2 dà luogo ad un problema che, formalmente, coincide con l'analogo problema per i sistemi tripli di rotazione. Si trova quindi che ponendo

$$(10)\qquad f'^2 = X\quad,\quad \Phi'^2 = Y$$

e considerando X come funzione di f, Y come funzione di Φ, dev'essere

$$(11)\qquad 12(X - Y) - 6(f - \Phi)(X' + Y') + (f - \Phi)^2 (X'' - Y'') = 0\,,$$

[1] Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* etc., pp. 222, 239, 282.

indicando con X', Y', ... le derivate di X, Y rispetto ad f, o a Φ. Abbiamo inoltre fatto vedere, nella Comunicazione citata a principio, che il modo più generale di soddisfare alla (11) consiste nel porre X eguale ad un polinomio di quarto grado in f con coefficienti arbitrarî, e Y eguale allo stesso polinomio in Φ. Possiamo dunque scrivere:

$$
(12) \qquad \begin{aligned} f'^2 &= X = a_0 f^4 + a_1 f^3 + a_2 f^2 + a_3 f + a_4 \,, \\ \Phi'^2 &= Y = a_0 \Phi^4 + a_1 \Phi^3 + a_2 \Phi^2 + a_3 \Phi + a_4 \,. \end{aligned}
$$

Ora, dalla seconda di queste equazioni si ha pure

$$
(12') \qquad f_0'^2 = a_4 f_0^4 - a_3 f_0^3 + a_2 f_0^2 - a_1 f_0 + a_0 \,,
$$

per cui, notando che f_0, f_0' sono immaginarie coniugate di f, f', ed indicando con a_i^0 il numero coniugato di a_i, dev'essere

$$
(13) \qquad a_0 = a_4^0 \quad , \quad a_1 = - a_3^0 \quad , \quad a_2 = a_2^0 \,.
$$

Da questi risultati discende anche che l'equazione $X = 0$ ha le radici distribuite a coppie; ad ogni radice τ ne corrisponde un'altra $-\dfrac{1}{\tau^0}$ e queste due radici non possono mai coincidere.

5. h^2 resta inalterata eseguendo su f e Φ la stessa sostituzione lineare, fratta

$$
\bar{f} = \frac{af + b}{cf + d} \quad , \quad \bar{\Phi} = \frac{a\Phi + b}{c\Phi + d} \quad , \quad ad - bc = 1
$$

e, poichè dalla seconda di queste relazioni abbiamo

$$
\bar{f}_0 = \frac{df_0 - c}{-bf_0 + a} \,,
$$

volendo considerare soltanto quelle trasformazioni che portano da un punto reale ad un altro punto reale, deve supporsi

$$
a = d^0 \quad , \quad b = - c^0 \,.
$$

Considereremo quindi soltanto le sostituzioni lineari, fratte sulla f della forma

$$
(14) \qquad \bar{f} = \frac{af + b}{-b^0 f + a^0} \quad \text{con} \quad aa^0 + bb^0 = 1
$$

che rappresentano dei movimenti rigidi della sfera su se stessa. È quindi naturale di considerare tutti i problemi che corrispondono a tutte le funzioni $\bar{f}$ legate alla f da relazioni come la (14), come un unico problema.

Notiamo pure che con una sostituzione della specie (14) sulle f e Φ, le equazioni (12) si trasformano in equazioni dello stesso tipo e le radici corrispondenti dei secondi membri hanno lo stesso grado di multiplicità. E, viceversa, due equazioni qualunque del tipo (12) sono sempre trasformabili una nell'altra con sostituzioni della forma (14) purchè, se il secondo membro della prima ha una radice multipla, la radice corrispondente del secondo membro della seconda ha lo stesso ordine di multiplicità, e, se questi secondi membri hanno radici distinte, i due gruppi delle quattro radici corrispondenti hanno lo stesso rapporto anarmonico.

6. Un sistema isotermo sulla sfera, come nel piano, è un sistema di linee confocali. Se il sistema isotermo si ottiene ponendo $e^{-u+i\varphi} = f(\alpha + i\beta)$, i fochi del sistema isotermo si ottengono ponendo $f'(\alpha + i\beta) = 0$. Nel nostro problema abbiamo da distinguere due soli casi.

I. L'equazione $X = 0$ ha due coppie di radici eguali, corrispondenti a due punti opposti della sfera. Con una trasformazione della forma (14) possiamo portare questi due punti nei punti 0 ed ∞ della sfera. Allora la prima delle (12) assume la forma $f' = f$ e si ha, corrispondentemente, $f = e^{\alpha + i\beta}$. Il sistema isotermo determinato così sulla sfera di raggio uno, è quello costituito dai paralleli e dai meridiani; ed il sistema triplo è quello che dà luogo alle coordinate polari. I risultati relativi sono molto noti.

II. L'equazione $X = 0$ ha quattro radici distinte, le quali corrispondono a due coppie di punti opposti della sfera e situati, quindi, in uno stesso meridiano. Con una sostituzione della solita forma (14) possiamo portare questi punti nei punti $\infty, 0, \tau, -\frac{1}{\tau}$ con τ reale, e, allora, alla prima delle (12), si potrà sostituire l'equazione

$$f'^2 = 4f(f-\tau)\left(f+\frac{1}{\tau}\right). \tag{12'}$$

Da questa equazione ricaviamo subito

$$f = p(\alpha + i\beta) - e_2 \tag{15}$$

dove p è la funzione ellittica fondamentale di Weierstrass, e bisogna prendere, corrispondentemente:

$$e_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\tau} + 2\tau\right) \quad , \quad e_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\tau} - \tau\right) \quad , \quad e_3 = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\tau} + \tau\right). \tag{16}$$

Dalla (15) discende subito

$$h^2 = 4\frac{p'(\alpha + i\beta)\,p'(\alpha - i\beta)}{[p(\alpha + i\beta) - p(\alpha - i\beta)]^2} = -4\,[p(2\alpha) - p(2i\beta)]$$

e le equazioni che determinano A e B potranno scriversi:

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{A}}{d(2\alpha)^2} + [n(n+1)\,p(2\alpha) + m]\,\mathrm{A} = 0\,, \\ \dfrac{d^2\mathrm{B}}{d(2i\beta)^2} + [n(n+1)\,p(2i\beta) + m]\,\mathrm{B} = 0\,, \end{cases}$$

dove m è una nuova costante arbitraria.

Ricordiamo ora la identità seguente, di cui abbiamo fatto uso nella citata Comunicazione

$$(18)\qquad \sum_1^3{}_i \frac{\{p(\alpha+i\beta)\,p(\alpha-i\beta) - e_i[p(\alpha+i\beta)+p(\alpha-i\beta)] - e_i^2 - e_{i+1}\,e_{i+2}\}^2}{(e_i-e_{i+1})\,(e_i-e_{i+2})\,[p(2u)-e_i]} = 0$$

dove può assumersi indifferentemente $u=\alpha$, ovvero $=i\beta$. Poichè dalla (15) e dalla (4′) si ha:

$$p(\alpha+i\beta)\,p(\alpha-i\beta) = \frac{1+z_1}{1-z_1} + 2e_2\,\frac{x_1}{1-z_1} + e_2^2\,,$$

$$p(\alpha+i\beta) + p(\alpha-i\beta) = 2\left(\frac{x_1}{1-z_1} + e_2\right),$$

ed inoltre, a causa delle (16):

$$e_2^2 - 2e_i\,e_2 - e_i^2 - e_{i+1}\,e_{i+2} = -1 \text{ per } i=1 \text{ e per } i=3\,,$$
$$\text{mentre } =1 \text{ per } i=2\,,$$

$$e_1 - e_2 = \tau\quad,\quad e_2-e_3 = \frac{1}{\tau}\quad,\quad e_1-e_3 = \frac{1}{\tau}+\tau\,,$$

ponendo al posto di $x_1\,,y_1\,,z_1$ rispettivamente $\dfrac{x}{\varrho}\,,\dfrac{y}{\varrho}\,,\dfrac{z}{\varrho}$, dopo ovvie riduzioni, dalla (18), si ricava l'equazione

$$\frac{(z-\tau x)^2}{p(2u)-e_1} + \frac{(\tau z + x)^2}{p(2u)-e_3} - (1+\tau^2)\,\frac{x^2+y^2+z^2}{p(2u)-e_2} = 0$$

che rappresenta, per $u=\alpha$ e per $u=i\beta$, le altre due serie di superficie che, insieme con le sfere concentriche, determinano il sistema triplo.