ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

diventare madri), mentre alla fine di maggio questa infezione mancava, erano esaurite le prime galle e non si rilevavano ancora le ulteriori. Ciò, mentre dimostra un'altra volta la non impossibilità che le uova d'inverno infettino le radici di viti europee, soltanto però attraverso generazioni gallicole, tende evidentemente a confermare l'ipotesi da noi precedentemente esposta, che le fondatrici sulle viti europee, morendo precocemente, non arrivino a deporvi quelle ultime uova, le quali sole dànno origine a neogallicole con caratteri di radicicola sulle viti americane.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari.* Nota del dott. Luigi Sinigallia, presentata dal Corrispondente E. Pascal.

1. Dopo i lavori fondamentali del prof. Volterra e del sig. Fredholm sulle equazioni integrali, si è cercato di ridurre la integrazione delle equazioni ordinarie lineari alla risoluzione di equazioni integrali. Però fra i varî modi proposti per questa riduzione non mi sembra sia stato notato quello che qui mi propongo di esporre e che certo è il più semplice, perchè i nuclei delle equazioni integrali che si ottengono sono appunto i coefficienti delle equazioni differenziali che si vogliono integrare. Si ha così il vantaggio di potere ottenere gli integrali chiesti espressi direttamente in funzione dei coefficienti della equazione data e di non avere bisogno di fare alcuna ipotesi sulla derivabilità dei coefficienti stessi: basta supporre che essi siano finiti ed integrabili.

2. Consideriamo il sistema differenziale

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{h=1}^{n} a_{i,h}\, y_h + b_i\,, \quad (i = 1\,, 2\,, \ldots n) \tag{1}$$

ove le $a_{i,h}$ e le b_i sono funzioni della sola x. La integrazione del sistema (1) ha per iscopo la determinazione delle funzioni $y_i = \psi_i(x)$ che soddisfanno alle (1) e che per un valore qualunque della variabile x (potremo prendere $x = 0$ senza nuocere alla generalità) assumono dei valori qualsiasi prestabiliti $\psi_i(0)$.

Dunque la integrazione del sistema (1) equivale alla risoluzione del sistema di equazioni integrali lineari

$$\psi_i(x) - \sum_{h=1}^{n} \int_0^x a_{i,h}(t)\, \psi_h(t)\, dt = \int_0^x b_i(t)\, dt + \psi_i(0) \tag{2}$$
$$(i = 1\,, 2 \ldots, n)\,.$$

Il sistema (2) è del tipo di quelli considerati dal sig. Fredholm e può subito ridursi, come ha dimostrato questo Autore [1], ad una sola equazione integrale lineare, la cui risoluzione ci darà appunto le funzioni $\psi_i(x)$ che soddisfanno alle (1) e che in $x=0$ prendono i valori assegnati $\psi_i(0)$.

Segue pure di qui che la integrazione della equazione alle derivate parziali del primo ordine

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{h=1}^{n} a_{i,h}\,x_h+b_i\right\}\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$$

ove al solito le $a_{i,h}$, b_i non contengono che la variabile x, dipende dalla risoluzione di un'equazione integrale lineare.

In particolare dunque dipenderà dalla risoluzione di una equazione integrale lineare, la integrazione della equazione ordinaria di ordine n

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_n y=r: \tag{3}$$

infatti l'integrale generale della (3) è una funzione $y=\psi_0(x)$ che soddisfa alla (3) e tale che la $\psi_0(x)$ e le sue $n-1$ prime derivate, che denoteremo con $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ in cui un punto qualunque $x=0$ prendono dei valori prestabiliti $\psi_0(0), \psi_1(0), \ldots, \psi_{n-1}(0)$. Ora il sistema (2) diviene qui

$$\psi_i(x)-\int_0^x \psi_{i+1}(t)\,dt=\psi_i(0) \qquad (i=0,1,\ldots,n-2)$$

$$\psi_{n-1}(x)+\int_0^x p_1(t)\,\psi_{n-1}(t)\,dt+\cdots+$$
$$+\int_0^x p_{n-1}(t)\,\psi_1(t)\,dt+\int_0^x p_n(t)\,\psi_0(t)\,dt=f(x)$$

ove

$$f(x)=\int_0^x r(t)\,dt+\psi_{n-1}(0). \tag{4}$$

Perciò se definiamo la funzione $F(x,t)$ colle condizioni seguenti

1°) se $r>x>r-1$, $s>x>s-1$ $\left\{\begin{matrix} r=1,2,\ldots,n\ \ 1 \\ s=1,2,\ldots,r,r+2,\ldots,n-1\end{matrix}\right\}$

$$F(x,t)=0$$

2°) se $r>x>r-1$, $r+1>t>r$ $(r=1,2,\ldots n-1)$

$$F(x,t)=\begin{cases}-1 & \text{se } x+1\geqq t\\ 0 & \text{se } x+1<t\end{cases}$$

3°) se $n>x>n-1$, $r>t>r-1$ $(r=1,2,\ldots n)$

$$F(x,t)=\begin{cases}p_{n-r+1}(t-r+1) & \text{se } x-n+r\geqq t\\ 0 & \text{se } x-n+r<t\end{cases}$$

[1] Fredholm, *Sur une classe d'equations fonctionnelles*. Acta Mathematica, t. 27 (1903), pp. 378, 379.

e l'altra funzione $Z(x)$ colle condizioni

$$Z(x) = \psi_{r-1}(0) \quad \text{se} \quad r > x > r-1 \qquad (r = 1, 2, \dots, n-1)$$
$$Z(x) = f(x - n + 1) \quad \text{se} \quad n > x > n-1,$$

ponendo

$$\Delta(x, t) = F(x, t) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \int_0^n \cdots \int_0^n F(x, x_1) F(x_1, x_2) \dots F(x_{r-1}, x_r) F(x_r, t) \, dx_1, \dots, dx_r,$$

avremo per le formole di Fredholm che l'integrale generale della (3) sarà

$$y = \psi_0(0) - \int_0^n \Delta(x, t) Z(t) \, dt$$

quando per la funzione $\Delta(x, t)$ che compare sotto il segno integrale del secondo membro si prenda l'espressione che corrisponde ad $1 > x > 0$.

3. Il prof. Burgatti [1] estende il problema della inversione degli integrali definiti proponendosi la determinazione della funzione $f(x)$ che soddisfa alla equazione

$$(5) \quad \varphi(x) = \int_0^x \{ \psi_0(x, t) f^{(n)}(t) + \psi_1(x, t) f^{(n-1)}(t) + \cdots + \psi_n(x, t) f(t) \} \, dt:$$

egli però non considera che i casi $n = 0$ ed $n = 1$, $\psi_0(x, t) \equiv 1$ ed in ambedue questi casi la (5) si riduce, come osserva il sig. Lalesco ad una equazione di Volterra. A proposito della (5) il sig. Lalesco in un suo recente lavoro [2] dimostra che se $\psi_0(x, x)$ non è identicamente nulla esisterà sempre una ed una sola funzione che soddisfa alla (5) e che in $x = 0$ prende assieme alle sue $n - 1$ prime derivate dei valori qualsiasi prestabiliti. Però egli nella sua dimostrazione deve supporre che le funzioni $\psi_r(x, t)$ $(r = 0, 1, \dots n)$ abbiano le derivate parziali rispetto a t dei primi $n - r$ ordini. Ora si può giungere, in modo analogo a quello tenuto nel paragrafo precedente, allo stesso risultato, ammettendo solamente la esistenza della derivata prima di $\psi_0(x, t)$ rispetto a t. Infatti con una integrazione per parti la (5) diviene

$$\varphi(x) + \psi_0(x, 0) f^{(n-1)}(0) = \psi_0(x, x) f^{(n-1)}(x) +$$
$$(5') \qquad + \int_0^x \left\{ \left[\psi_1(x, t) - \frac{\partial \psi_0(x, t)}{\partial t} \right] f^{(n-1)}(t) + \psi_2(x, t) f^{(n-2)}(t) + \right.$$
$$\left. + \cdots + \psi_n(x, t) f(t) \right\} dt:$$

(1) Burgatti, *Sulla inversione degli integrali definiti.* Rend. Acc. Lincei (5), vol. 12 (1903).

(2) Lalesco, *Sur l'équation de Volterra.* Journal de Liouville (6), t. 4 (1908).

ora supponendo $\psi_0(x, x) \neq 0$ alla (5′) potremo sostituire il sistema

$$f(x) - \int_0^x f^{(1)}(t)\,dt = f(0)$$

$$f^{(1)}(x) - \int_0^x f^{(2)}(t)\,dt = f^{(1)}(0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n-2)}(x) - \int_0^x f^{(n-1)}(t)\,dt = f^{(n-2)}(0)$$

$$f^{(n-1)}(x) + \frac{1}{\psi_0(x\,x)}\int_0^x \left\{ \left[\psi_1(x, t) - \frac{\partial \psi_0(x, t)}{\partial t} \right] f^{(n-1)}(t) + \right.$$

$$\left. + \psi_2(x, t)\, f^{(n-2)}(t) + \cdots + \psi_n(t)\, f(t) \right\} dt = \frac{\varphi(x) + \psi_0(x, 0)\, f^{(n-1)}(0)}{\psi_0(x, x)}.$$

Perciò, se $\psi_0(x, x) \neq 0$, potremo determinare la $f(x)$ che soddisfa alla (5) ed in modo che essa e le sue prime $n - 1$ derivate assumano in $x = 0$ i valori $f(0), f^{(1)}(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ prestabiliti.

È bene però notare che supponendosi le funzioni $\psi_i(x, t)$ finite ed integrabili per la risolubilità della (5) dovrà aversi $\varphi(0) = 0$: altrimenti potrà risolversi soltanto la equazione che si deduce dalla (5) sostituendo alla funzione $\varphi(x)$ del suo primo membro l'altra $\varphi(x) - \varphi(0)$.

Quando poi $\psi_0(x, x)$ è identicamente nulla potranno darsi due casi:

1°) anche la $\psi_0(x, 0) \equiv 0$ ed allora la (5) può trasformarsi in una altra equazione della stessa forma, in cui però sotto il segno integrale non vi è al più che la derivata $n - 1$ della funzione incognita $f(x)$.

2°) $\psi_0(x, x) \equiv 0$ ma $\psi_0(x, 0) \neq 0$ per $x \neq 0$: ed allora potrà diminuire il numero delle condizioni che si possono imporre alla funzione incognita. Senza volerci fermare su tale discussione, notiamo che per $n = 1$ la (5) individuerà in tale caso in generale una ed una sola funzione $f(x)$: ma solo in generale perchè essa potrà in qualche caso essere insolubile quando non si assoggetti la $\varphi(x)$ che alla condizione $\varphi(0) = 0$. Ciò avviene appunto per l'equazione

$$\int_0^x (x - t) \{ f'(t) + f(t) \}\, dt = \varphi(x), \tag{a}$$

che è insolubile se $\varphi'(0) \neq 0$. Invece se $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ esisterà sempre una funzione che soddisfa alla (a) e prende un valore assegnato $f(0)$ in $x = 0$.

4. I risultati precedenti possono applicarsi al caso della equazione lineare del secondo ordine

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\,\frac{dy}{dx} + qy = r \tag{6}$$

ove al solito le funzioni $p(x), q(x), r(x)$ si suppongono finite ed integrabili, almeno pei valori di x che si avranno a considerare. Però qui per brevità ci limitiamo a verificare i risultati che col metodo esposto si ottengono.

Colle funzioni

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi_0(x\,,\tau) = e^{-\int_\tau^x p(\sigma)d\sigma} \\ \varphi_1(x\,,t) = \int_\tau^x \varphi_0(x\,,\tau_1)\,q(\tau_1)\,d\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} \varphi_0(\tau_2\,,\tau)\,d\tau_2 \\ \varphi_2(x\,,\tau) = \int_\tau^x \varphi_0(x\,,\tau_1)\,q(\tau_1)\,d\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} \varphi_1(\tau_2\,,\tau)\,d\tau_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x\,,\tau) = \int_\tau^x \varphi_0(x\,,\tau_1)\,q(\tau_1)\,d\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} \varphi_{n-1}(\tau_2\,,\tau)\,d\tau_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

formiamo la serie

$$(8)\qquad \Phi(x\,,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x\,,\tau)\,.$$

Parimenti colle funzioni

$$(9)\quad \begin{cases} \omega_0(x\,,\tau) = \int_\tau^x \varphi_0(x\,,\tau_1)\,q(\tau_1)\,d\tau_1 \\ \omega_1(x\,,\tau) = \int_\tau^x \varphi_0(x\,,\tau_1)\,q(\tau_1)\,d\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} \omega_0(\tau_2\,,\tau)\,d\tau_2 \\ \omega_2(x\,,\tau) = \int_\tau^x \varphi_0(x\,,\tau_1)\,q(\tau_1)\,d\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} \omega_1(\tau_2\,,\tau)\,d\tau_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n(x\,,\tau) = \int_\tau^x \varphi_0(x\,,\tau_1)\,q(\tau_1)\,d\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} \omega_{n-1}(\tau_2\,,\tau)\,d\tau_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

formiamo la serie

$$(10)\qquad \Omega(x\,,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \omega_n(x\,,\tau)\,,$$

Le serie $\Phi(x\,,\tau)\,,\Omega(x\,,\tau)$ sono del tipo di quelle considerate dal professore Volterra e quindi sono equiconvergenti.

L'integrale generale della (6) si esprime per mezzo delle serie $\Phi(x,\tau)$, $\Omega(x\,,\tau)$: abbiamo ora bisogno della espressione delle derivate prime di queste funzioni rispetto alla variabile x. Dalle (7) ricaviamo

$$(11)\qquad \frac{\partial \varphi_0(x\,,\tau)}{\partial x} = -\,p(x)\,\varphi_0(x\,,\tau)$$

e, poichè $\varphi_0(x, x) = 1$,

$$\frac{\partial \varphi_n(x,\tau)}{\partial x} = \int_\tau^x \frac{\partial \varphi_0(x,\tau_1)}{\partial x} q(\tau_1)\, d\tau_1 \int_\tau^{\tau_1} \varphi_{n-1}(\tau_2, \tau)\, d\tau_2 + \\ + q(x) \int_\tau^x \varphi_{n-1}(\sigma, \tau)\, d\sigma$$

e per la (11)

$$\frac{\partial \varphi_n(x,\tau)}{\partial x} = - p(x)\, \varphi_n(\sigma, \tau) + q(x) \int_\tau^x \varphi_{n-1}(\sigma, \tau)\, d\sigma \,.$$

Dunque la serie delle derivate dei termini della serie $\Phi(x, \tau)$ è

$$- p(x)\, \Phi(x, \tau) - q(x) \int_\tau^x \Phi(\sigma, \tau)\, d\sigma$$

e perciò

$$\frac{\partial \Phi(x,\tau)}{\partial x} = - p(x)\, \Phi(x, \tau) - q(x) \int_\tau^x \Phi(\sigma, \tau)\, d\sigma \,. \tag{12}$$

Analogamente avendosi per le (9), (11)

$$\frac{\partial \omega_0(x,\tau)}{\partial x} = q(x) - p(x)\, \omega_0(x, \tau)$$

$$\frac{\partial \omega_n(x,\tau)}{\partial x} = q(x) \int_\tau^x \omega_{n-1}(\sigma, \tau)\, d\sigma - p(x)\, \omega_n(x, \tau)$$

sarà

$$\frac{\partial \Omega(x,\tau)}{\partial x} = q(x) \left\{ 1 - \int_\tau^x \Omega(\sigma, \tau)\, d\sigma \right\} - p(x)\, \Omega(x, \tau) \tag{13}$$

5. Premesso ciò, consideriamo la funzione

$$\theta_1(x) = \int_0^x \left\{ p(\tau) \int_\tau^x \Phi(\sigma, \tau)\, d\sigma + \int_\tau^x \Omega(\sigma, \tau)\, d\sigma \right\} f(t)\, dt :$$

si ha subito

$$\frac{d\theta_1(x)}{dx} = \int_0^x \{ p(\tau)\, \Phi(x, \tau) + \Omega(x, \tau) \} f(\tau)\, d\tau \,.$$

Ancora per le (12), (13) poichè $\Phi(x, x) = 1$, $\Omega(x, x) = 0$; abbiamo

$$\frac{d}{dx} \int_0^x p(\tau)\, \Phi(x, \tau)\, f(\tau)\, d\tau = p(x)\, f(x) - p(x) \int_0^\tau \Phi(x, \tau)\, p(\tau)\, f(\tau)\, d\tau - \\ - q(x) \int_0^x p(\tau)\, f(\tau)\, d\tau \int_\tau^x \Phi(\sigma, \tau)\, d\sigma$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \Omega(x, \tau)\, f(\tau)\, d\tau = q(x) \int_0^x f(\tau)\, d\tau - q(x) \int_0^x f(\tau)\, d\tau \int_\tau^x \Omega(\sigma, \tau)\, d\sigma - \\ - p(x) \int_0^x \Omega(x, \tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

e perciò

$$\frac{d^2\theta_1(x)}{dx^2} + p(x)\frac{d\theta_1(x)}{dx} + q(x)\,\theta_1(x) = p(x)\,f(x) + q(x)\int_0^x f(\tau)\,d\tau\,.$$

Sicchè la funzione

$$\theta(x) = \int_0^x f(\tau)\,d\tau - \theta_1(x) = \int_0^x \Big\{1 - p(\tau)\int_\tau^x \Phi(\sigma\,,\tau)\,d\sigma - \\ - \int_\tau^x \Omega(\sigma\,,\tau)\,d\sigma\Big\}\,f(\tau)\,d\tau$$

soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + p(x)\frac{d\theta}{dx} + q(x)\,\theta(x) = f'(x):$$

ma per la (4)

$$f'(x) = r(x)$$

dunque la funzione $\theta(x)$ è un integrale della (5), ma non è l'integrale generale. Infatti la sua derivata $\theta'(x)$ assume in $x = 0$ il valore fissato $\psi_1(0)$, ma la $\theta(x)$ in $x = 0$ si annulla.

Per avere l'integrale generale dovremo procurarci un integrale della equazione omogenea

$$y'' + py' + qy = 0: \tag{14}$$

ora si vede subito che, poichè la funzione

$$\zeta(x) = \int_0^x q(\tau)\,d\tau\int_\tau^x \Phi(\sigma\,,\tau)\,d\sigma$$

per le formole precedenti soddisfa all'equazione

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + p(x)\frac{d\zeta}{dx} + q(x)\,\zeta(x) = q(x),$$

la funzione

$$1 - \zeta(x)$$

sarà una soluzione della (14). Perciò, essendo $\psi_0(0)$ il valore che l'integrale generale della (6) deve prendere in $x = 0$, esso sarà dato dalla formola

$$y = \psi_0(0) + \int_0^x \Big\{1 - p(\tau)\int_\tau^x \Phi(\sigma\,,\tau)\,d\sigma - \int_\tau^x \Omega(\sigma\,,\tau)\,d\sigma\Big\}\,f(\tau)\,d\tau - \\ - \psi_0(0)\int_0^x q(\tau)\,d\tau\int_\tau^x \Phi(\sigma\,,\tau)\,d\sigma\,.$$