ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

5. Questo modo di comportarsi dei liquidi oculari non è senza importanza per quanto riguarda la normale trasparenza del cristallino, perchè, come vedremo, l'acido carbonico è capace di precipitare le proteine lenticolari csitole allo stato di alcaliproteine, onde può prevedersi che anche un eccesso di acido carbonico nei liquidi oculari può produrre opacamento superficiale della lente cristallina.

Matematica. — *Condizioni necessarie e sufficienti perchè un insieme continuo ∞^r di trasformazioni costituisca un gruppo.* Nota di Carlo Severini, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

In due Note recentemente pubblicate [1] ho cercato di generalizzare il primo teorema fondamentale di Lie, e sono riuscito nel mio intento, di assegnare le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè un insieme continuo ∞^r di trasformazioni costituisca un gruppo, nel caso che ad esso appartenga la trasformazione identica. Mi propongo ora di far vedere come si risolva per un insieme qualsivoglia la medesima questione.

1. Si consideri l'insieme ∞^r di trasformazioni:

$$x'_i = f_i(x\,, a) \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots\,, n) \tag{1}$$

ove le $f_i(x\,, a)$ indicano funzioni analitiche, monodrome delle variabili x_1, $x_2\,, \ldots\,, x_n$ e dei parametri $a_1\,, a_2\,, \ldots\,, a_r$, alle quali funzioni intenderemo sempre riferirci iu seguito.

Perchè le (1) costituiscano un gruppo dovranno anzitutto essere tali, che la trasformazione composta:

$$x''_i = f_i(f(x\,, a)\,, b) \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots\,, n) \tag{2}$$

con due qualsivogliano di esse:

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= f_i(x\,, a) \\ x''_i &= f_i(x'\,, b) \end{aligned}\right. \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots\,, n)$$

contenga soltanto r parametri essenziali.

[1] *Studio sul primo teorema fondamentale di Lie*. Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXV (1908); *Aggiunta alla Nota: Studio sul primo teorema fondamentale di Lie*. Idem, t. XXV (1908).

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè ciò abbia luogo sono state da me poste sotto una nuova forma, che ben si presta al caso nostro, nella prima delle Note dianzi citate. Conviene anzitutto che richiamiamo brevemente le considerazioni svolte in detta Nota.

Perchè le (2) contengano soltanto r parametri essenziali, è necessario, come si sa, che le x', date dalle (1), quali funzioni dei parametri, soddisfino ad equazioni della forma:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x')\, \psi_{\rho k}(a) \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\dots,n \\ k=1,2,\dots,r \end{pmatrix}, \tag{3}$$

in cui il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$ non sia identicamente nullo, e le $\xi_{\rho h}(x')$ non soddisfino a nessun sistema di equazioni della forma:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_\rho\, \xi_{\rho h}(x') = 0 \qquad (h=1,2,\dots,n)$$

coi coefficienti g_ρ indipendenti dalle x' e non tutti nulli. Inoltre la (2) potrà scriversi:

$$x''_i = g_i(x\,,c) \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

ove le c sono funzioni delle a e delle b:

$$c_k = \theta_k(a\,,b) \qquad (k=1,2,\dots,r); \tag{4}$$

e le (4) possono risolversi sia rispetto alle a, sia rispetto alle b. Se ne deduce che è possibile, dato un sistema di valori $a^{(0)}$ dei parametri, soddisfare alle equazioni:

$$\theta_k(a\,,b) = \theta_k(a^{(0)}\,,a^{(0)}) \qquad (k=1,2,\dots,r)$$

sia assegnando le a e calcolando le b, sia inversamente assegnando le b e calcolando le a; ovvero, ciò che è lo stesso, indicando con S_a la trasformazione rappresentata dalle (1), che si può soddisfare all'equazione simbolica:

$$S_a\, S_b = S^2_{a^{(0)}} \tag{5}$$

sia assegnando la S_a e calcolando la S_b, sia assegnando la S_b e calcolando la S_a.

La (5) può anche scriversi:

$$S^{-1}_{a^{(0)}}\, S_a = S_{a^{(0)}}\, S^{-1}_b\ .$$

Ponendo:

$$S^{-1}_{a^{(0)}}\, S_a = E_a \tag{6}$$

si ha allora:

$$S_{a^{(0)}} S_b^{-1} = E_a$$

donde:

(7) $$S_b = E_a^{-1} S_{a^{(0)}} .$$

Se le $a^{(0)}$ sono scelte in modo che per esse non si annulli il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$, le (6) costituiscono, in base al primo teorema fondamentale di Lie, un gruppo, al quale appartiene la trasformazione E_a^{-1}, sicchè posto:

$$E_a^{-1} = E_{a'}$$

si ottiene, per la (7):

$$S_b = E_{a'} S_{a^{(0)}} .$$

Questa relazione e la (6) ci dicono che l'insieme dato di trasformazioni coincide con ciascuno dei due insiemi:

(8) $$S_{a^{(0)}} E_a \;,\; E_a S_{a^{(0)}} .$$

Se con a ed $\bar{a}$ indichiamo i parametri che in questi due insiemi rispettivamente determinano una medesima trasformazione, potremo scrivere:

$$S_{a^{(0)}} E_a = E_{\bar{a}} S_{a^{(0)}}$$

ossia:

$$E_a = S_{a^{(0)}}^{-1} E_{\bar{a}} S_{a^{(0)}}$$

donde in ultimo, per la (6)

(9) $$S_a = S_{a^{(0)}}^{-1} S_{\bar{a}} S_{a^{(0)}} .$$

Perchè la trasformazione composta con due qualsivogliano delle (1) contenga soltanto r parametri essenziali è dunque anche necessario che l'insieme dato venga, per mezzo di una sua trasformazione, corrispondente a valori dei parametri, che non annullano il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$, trasformato in se stesso.

Questa condizione e l'altra sopra detta che le x'_i date dalle (1), come funzioni dei parametri, soddisfacciano ad equazioni della forma delle (3), colle indicate proprietà per le $\xi_{\rho h}(x')$ e per le $\psi_{\rho k}(a)$, sono anche sufficienti al nostro scopo. Se partiamo infatti dalla (9) e risaliamo, otteniamo che all'insieme dato competono le due rappresentazioni, simbolicamente indicate mediante le (8), e però la trasformazione composta con due qualsivogliano di esso:

$$S_a = S_{a^{(0)}} E_a \quad , \quad S_b = E_{\bar{b}} S_{a^{(0)}}$$

potendosi scrivere:

$$S_a \, S_{\bar{b}} = S_{a^{(0)}} \, E_a \, E_{\bar{b}} \, S_{a^{(0)}} ,$$

contiene come parametri essenziali gli r parametri essenziali, da cui dipende la $E_a \, E_{\bar{b}}$.

In ciò che precede s'intende bene che ci si deve riferire a convenienti intorni di $S_{a^{(0)}}$, ma la proprietà che, componendo due qualsivogliano delle (1), si ottenga una trasformazione, contenente soltanto r parametri essenziali, resta nondimeno, senza limitazione alcuna, stabilita. Posto infatti:

$$x'_i = f_i(f(x\,,a)\,,b) = F_i(x\,,a\,,b) \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots,n)\,, \tag{10}$$

se con μ s'indica la caratteristica della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial a_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial a_1} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial F_n}{\partial a_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial a_r} & \dfrac{\partial F_2}{\partial a_r} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial F_n}{\partial a_r} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial b_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial b_1} & & \dfrac{\partial F_n}{\partial b_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial b_r} & \dfrac{\partial F_2}{\partial b_r} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial F_n}{\partial b_r} \end{matrix} \right\|$$

con μ_1 la caratteristica della matrice analoga, ottenuta aggregando alle F_i tutte le loro derivate prime rapporto alle x, con μ_2 la caratteristica della matrice ottenuta, aggregando tutte le derivate prime e seconde rispetto alle x, e così via, il numero dei parametri essenziali nell'insieme di trasformazioni (10) coincide col massimo valore $s \leqq 2r$, che si può raggiungere, percorrendo la successione:

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots \leqq 2r \text{ (1)};$$

e se $s = r$ mentre le a e le b variano in certi intorni delle $a^{(0)}$, ciò dovrà verificarsi sempre.

Con quanto precede resta stabilito il seguente teorema, al quale in principio abbiamo accennato:

Se l'insieme dato ∞^r di trasformazioni

$$x'_i = f_i(x\,,a) \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots,n) \tag{1}$$

(1) Cfr. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi finiti, continui di trasformazioni.* Pisa, Ed. Spoerri, 1903.

è tale, che la trasformazione composta con due qualsivogliano di esso contiene soltanto r parametri essenziali:

a) le x', come funzioni dei parametri, soddisfano ad equazioni della forma:

$$\frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x')\, \psi_{\rho k}(a) \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}, \tag{3}$$

in cui il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$ non è identicamente nullo, e le $\xi_{\rho h}(x')$ non possono soddisfare a nessun sistema di equazioni della forma:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_\rho\, \xi_{\rho h}(x') = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

coi coefficienti g_ρ indipendenti dalle x' e non tutti nulli;

b) essendo $S_{a^{(0)}}$ una trasformazione dell'insieme, corrispondente a valori dei parametri che non annullano il determinante suddetto, l'insieme medesimo viene, per mezzo di $S_{a^{(0)}}$, trasformato in se stesso.

Viceversa, se le x', come funzioni dei parametri, soddisfano ad equazioni del tipo (3), ed esiste una trasformazione come $S_{a^{(0)}}$, che gode delle dette proprietà, la trasformazione composta con due qualsivogliano delle (1), contiene soltanto r parametri essenziali.

2. Le due condizioni contemplate nel precedente teorema sono evidentemente necessarie, affinchè l'insieme dato di trasformazioni possa costituire un gruppo.

Vogliamo ora far vedere che queste condizioni, insieme coll'altra, parimenti necessaria, che esista una trasformazione $S_{a^{(1)}}$, corrispondente a valori dei parametri che non annullano il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$, per la quale moltiplicando le trasformazioni dell'insieme (1), si ottengano trasformazioni dello stesso insieme, sono anche al nostro scopo sufficienti.

Riguardo all'ultima condizione è da osservare che non fa d'uopo distinguere in quale ordine la $S_{a^{(1)}}$ s'intenda composta colle trasformazioni (1), dacchè essa trasforma in sè l'insieme di tali trasformazioni, e si ha quindi:

$$S_a S_{a^{(1)}} = S_{a^{(1)}} S_{a'},$$

almeno finchè la S_a e la $S_{a'}$ variano in convenienti intorni di $S_{a^{(1)}}$, come a noi occorre. Questo fatto che è senz'altro espresso dalla seconda condizione, ove in particolare la $S_{a^{(0)}}$ coincida colla $S_{a^{(1)}}$, è in ogni caso conseguenza delle prime due condizioni, le quali fanno sì che la trasformazione composta con due qualsivogliano delle (1) contenga soltanto r parametri essenziali, e quindi che la $S_{a^{(1)}}$, come ogni altra trasformazione, i cui parametri non annullino il solito determinante, trasformi in sè (cfr. teor. prec.) l'insieme dato.

Ciò posto, dalla prima delle condizioni ora dette, tenendo conto che nell'insieme (1) gli r parametri sono essenziali, deduciamo, come è noto, che le r trasformazioni infinitesimali:

$$X_\rho f = \sum_{h=1}^{h=n} \xi_{\rho h}(x) \frac{\partial f}{\partial x_h} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r)$$

sono linearmente indipendenti ed atte a generare un gruppo G_r ad r parametri essenziali. Ogni trasformazione dell'insieme dato, nell'intorno di una di esse, corrispondente a valori dei parametri, che non annullano il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$, si otterrà facendo seguire a questa una trasformazione di detto gruppo, presa in un intorno della identica.

Si considerino ora due trasformazioni qualsivogliano nell'intorno della $S_{a^{(1)}}$:

$$S_a = S_{a^{(1)}} E_\mu \quad , \quad S_b = S_{a^{(1)}} E_\nu$$

ove E_μ, E_ν indicano due determinate trasformazioni di G_r, e si formi il prodotto:

$$S_a S_b = S_{a^{(1)}} E_\mu S_{a^{(1)}} E_\nu . \tag{11}$$

Dalle prime due condizioni, che abbiamo posto, segue, in forza del risultato del § 1, che la trasformazione composta con due qualsivogliano delle (1) contiene soltanto r parametri essenziali, e l'insieme dato viene quindi, per la prima parte del risultato medesimo, trasformato in sè da ogni trasformazione di esso, i cui parametri non annullino il solito determinante, in particolare dalla $S_{a^{(1)}}$, cosicchè si potrà scrivere:

$$\overset{-1}{S}_{a^{(1)}} S_a S_{a^{(1)}} = S_{a'}$$

donde:

$$\overset{-1}{S}_{a^{(1)}} \overset{-1}{S}_{a^{(1)}} S_a S_{a^{(1)}} = \overset{-1}{S}_{a^{(1)}} S_{a'} ;$$

e poichè il gruppo delle $\overset{-1}{S}_{a^{(1)}} S_a$ coincide col gruppo G_r, sarà:

$$\overset{-1}{S}_{a^{(1)}} E_\mu S_{a^{(1)}} = E_{\mu'}$$

ossia:

$$E_\mu S_{a^{(1)}} = S_{a^{(1)}} E_{\mu'} ,$$

per modo che la (11) si cambia nell'altra:

$$S_a S_b = S^2_{a^{(1)}} E_{\mu'} E_\nu ;$$

e posto:

$$E_{\mu'} E_\nu = E_\pi$$

si ha ancora:

$$S_a\,S_b = \overset{2}{S}_{a^{(1)}}\,E_\pi\,.$$

In fine se:

$$E_\pi = \overset{-1}{S}_{a^{(1)}}\,S_c$$

risulta:

$$S_a\,S_b = \overset{2}{S}_{a^{(1)}}\,\overset{-1}{S}_{a^{(1)}}\,S_c$$

cioè:

$$S_a\,S_b = S_{a^{(1)}}\,S_c$$

la quale, per la terza delle poste condizioni, ci dice che la $S_a\,S_b$ appartiene all'insieme dato: questo costituisce dunque un gruppo.

Riassumendo possiamo ora enunciare il seguente teorema:

Affinchè l'insieme ∞^r di trasformazioni:

$$x_i' = f_i(x\,,\,a) \qquad (i = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,n)$$

costituisca un gruppo è necessario e sufficiente:

a) che le x', come funzioni dei parametri, soddisfino ad equazioni della forma:

$$\frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \xi_{\rho h}(x')\,\psi_{\rho k}(a) \qquad \begin{pmatrix} h = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,n \\ k = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,r \end{pmatrix}$$

in cui il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$ non sia identicamente nullo, e le $\xi_{\rho h}(x')$ non soddisfino a nessun sistema di equazioni della forma:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=r} g_\rho\,\xi_{\rho h}(x') = 0 \qquad (h = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,n)$$

coi coefficienti g_ρ indipendenti dalle x' e non tutti nulli;

b) che esista nell'insieme una trasformazione $S_{a^{(0)}}$, i cui parametri non annullino il determinante delle $\psi_{\rho k}(a)$, per mezzo della quale l'insieme medesimo venga trasformato in se stesso;

c) che esista una trasformazione, distinta o no dalla $S_{a^{(0)}}$, e corrispondente ancora a valori dei parametri, che non annullano il detto determinante, per la quale moltiplicando le trasformazioni dell'insieme, si ottengano trasformazioni che ad esso appartengono.

Osservazione. — La seconda e terza condizione sono in particolare soddisfatte, se, per valori dei parametri, che non annullano il solito determinante, esiste fra le (1) la trasformazione identica: si ha allora il primo teorema fondamentale di Lie.