ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 6 settembre 1908.

Fisica-matematica. — *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate*. Nota del Corrispondente G. Lauricella.

In due pubblicazioni del 1896 [1] mi occupai del problema generale delle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate, giovandomi dei metodi escogitati dal Poincaré [2] nella teoria della propagazione del calore, e supponendo dimostrata l'esistenza della soluzione del problema generale dell'equilibrio delle piastre stesse, la quale era allora nota soltanto in pochi casi particolari. Le condizioni oggidì sono migliorate assai; giacchè il detto problema generale dell'equilibrio è risoluto, mentre i recenti progressi della teoria delle equazioni integrali offrono, come è stato dimostrato con diversi esempi, un potente strumento di ricerca in quistioni di tale natura.

Nella presente Nota, valendomi della proprietà di simmetria della *seconda funzione di Green*, con l'aiuto appunto della elegante teoria delle equazioni integrali a funzione caratteristica simmetrica, ritrovo immediatamente i risultati di già stabiliti nelle mie suddette Memorie, ne dò altri ancora, e studio nei suoi dettagli la formola, mediante la quale si può esprimere il moto vibratorio generale di una piastra elastica incastrata.

(1) *Sull'equazioni delle vibrazioni delle placche elastiche incastrate* (Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino, ser. II, t. XLVI); *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate* (Nuovo Cimento, ser. IV, vol. IV).

(2) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. VIII.

Premetto qui in un primo articolo alcuni nuovi teoremi sulle equazioni integrali, che trovano applicazione nell'articolo II, nel quale mi occupo esclusivamente del detto problema di fisica-matematica.

Altri problemi analoghi della fisica-matematica possono risolversi ripetendo, senza sostanziali mutamenti, i ragionamenti contenuti nell'articolo II della presente Nota. Citerò ad es. (essendo oramai risoluto il problema dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti in superficie) il problema delle vibrazioni di un corpo elastico isotropo, quando i punti della superficie limite sono in riposo, del quale mi occupai già nella mia antica Memoria: *Sulle equazioni del moto dei corpi elastici* (1) e del quale pure si occupò due anni or sono il sig. Korn (2).

Art. I. — Teoremi sulle equazioni integrali.

1. È noto (3) che, se la funzione caratteristica $K(s, t)$ ha la forma:

$$K(s, t) = \sum_1^m {}_\nu f_\nu(s)\, \chi_\nu(t)\,, \tag{1}$$

l'espressione:

$$\theta(t) = \chi(t) - \sum_1^n {}_\mu \psi_\mu(t) \int_a^b \chi(r)\, \psi_\mu(r)\, dr \qquad (n \leq m) \tag{2}$$

con $\chi(t)$ funzione arbitraria, ma atta all'integrazione nel campo (a, b), è una soluzione dell'equazione:

$$\int_a^b K(s, t)\, \theta(t)\, dt = 0\,. \tag{3}$$

Di guisa che si avrà: *se l'equazione* (3) *non ammette soluzione alcuna diversa da zero* (4), *è impossibile esprimere* $K(s, t)$ *mediante una somma di prodotti della forma* $f_\nu(s)\, \chi_\nu(t)$, ossia (5) *la serie delle costanti della funzione caratteristica* $K(s, t)$ *è certamente infinita.*

Possiamo anzi enunciare il seguente risultato: *si sappia in un modo qualsiasi che le funzioni ortogonali* $\psi_1, \psi_2 \ldots.$ *godano tutte di certe medesime proprietà di continuità e di derivabilità nel campo* (a, b); se il loro

(1) Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino, ser. II, t. XLV.

(2) *Sur les vibrations d'un corps élastique dont la surface est en repos* (Comptes rendus, 26 février 1906); *Die Eigenschwingungen eines elastichen Körpers mit ruhender Oberfläche* (Sitzungsberichte der mathem.-phys. Klasse der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXVI, 1906, Heft II).

(3) Lauricella, *Sopra alcune equazioni integrali*, § 6 (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. XVII, 1° sem.). Le notazioni adottate nel presente articolo sono quelle introdotte nella Nota testè citata.

(4) Cioè, servendosi della denominazione introdotta da Hilbert, *se la funzione caratteristica* $K(s, t)$ *è chiusa.*

(5) Lauricella, loc. cit., § 3_1.

numero è finito, si potrà scegliere la funzione $\chi(t)$ in modo tale che la corrispondente funzione $\theta(t)$, data dalla (2), sia non identicamente nulla e goda delle medesime proprietà di continuità e di derivabilità delle $\psi_1, \psi_2, \ldots$; di modo che *se l'equazione* (3) *non ammette soluzione alcuna diversa da zero, godente delle medesime proprietà di continuità e di derivabilità delle* $\psi_1, \psi_2, \ldots$, *è impossibile esprimere* $K(s, t)$ *mediante una somma di prodotti della forma* $f_\nu(s)\,\chi_\nu(t)$, ossia *la serie.....*

2. A complemento di un noto teorema di Schmidt sulla sviluppabilità in serie [1], si può enunciare il seguente altro: *se si ha:*

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt$$

e se la funzione $\{h(t)\}^2$ *è atta all'integrazione nel campo* (a, b), *la serie*

$$\sum_\nu \lambda_\nu^2 \left\{ \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt \right\}^2$$

sarà convergente.

Infatti, rammentando le formole:

$$\int_a^b \psi_\mu(t)\, \psi_\nu(t)\, dt = \begin{cases} 1 \text{ se } \mu = \nu, \\ 0 \text{ se } \mu \neq \nu, \end{cases} \quad \int_a^b h(t)\, \psi_\nu(t)\, dt = \lambda_\nu \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt,$$

e ponendo:

$$d_\nu = \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt,$$

si ha per i qualsiasi:

$$0 \leq \int_a^b \left\{ h(t) - \sum_1^i{}_\nu\, d_\nu\, \lambda_\nu\, \psi_\nu(t) \right\}^2 dt =$$

$$= \int_a^b \{h(t)\}^2\, dt + \sum_1^i{}_\nu\, \lambda_\nu^2\, d_\nu^2 - 2 \sum_1^i{}_\nu\, \lambda_\nu\, d_\nu \int_a^b h(t)\, \psi_\nu(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \{h(t)\}^2\, dt - \sum_1^i{}_\nu\, \lambda_\nu^2\, d_\nu^2\,.$$

Donde risulta il teorema enunciato.

3. Sussiste ancora il seguente teorema di derivazione per serie: *se si ha:*

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt \tag{4}$$

con $h(t)$ *funzione atta all'integrazione nel campo* (a, b), *se all'integrale al secondo membro della* (4) *è applicabile* i *volte la derivazione sotto il*

[1] *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen* § 16 (Math. Ann., Bd. LXIII, H. 4).

segno, e se esiste una quantità finita A *tale che si abbia per tutti i valori di s tra a e b:*

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial^i K(s, t)}{\partial s^i} \right\}^2 dt \leq A ,$$

sarà:

$$\frac{d^i g}{ds^i} = \sum_\nu \frac{d^i \varphi_\nu}{ds^i} \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt ,$$

e la serie al secondo membro convergerà assolutamente ed uniformemente.

Infatti basterà tenere presente la formola:

$$\frac{d^i \varphi_\nu}{ds^i} \int_a^b g(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial^i K(s, t)}{\partial s^i} \psi_\nu(t)\, dt \int_a^b h(t)\, \psi_\nu(t)\, dt ,$$

ed applicare senz'altro un noto teorema di Schmidt (¹).

ART. II. — 2ª funzione di Green.

1. Indichiamo con s una linea piana chiusa, con σ l'area piana finita da essa racchiusa, con n la normale nei punti di s, e prendiamo per direzione positiva di n quella rivolta verso l'area σ. Supponiamo poi che per la linea s sia risoluto il problema dell'equilibrio delle piastre elastiche incastrate, ossia che, riferiti i punti del piano di s a due assi cartesiani ortogonali, indicate con ξ, η ; x, y le coordinate di due punti variabili rispettivamente nell'interno del campo σ e sulla linea s, e posto:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad , \quad \Delta^4 = \Delta^2(\Delta^2) ,$$

$$\frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \widehat{nx} + \frac{\partial}{\partial y} \cos \widehat{ny} ,$$

si sappia che esista una funzione $u(\xi, \eta)$, la quale soddisfaccia alle equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma) & \Delta^4 u = f(\xi, \eta) , \\ \text{(nei punti di } s) & u = \dfrac{du}{dn} = 0 , \end{cases}$$

dove $f(\xi, \eta)$ è funzione arbitraria, alla quale però sia applicabile il noto *teorema di Poisson* (²).

(¹) Vedi loc. cit., § 2.

(²) Come è noto, questo problema è stato risoluto in casi molto generali (cfr. ad es. la mia Memoria: *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques..*, in corso di pubblicazione negli Acta mathematica).

Rammentiamo qui che [1] se si introduce quella funzione $g(\xi', \eta' ; \xi, \eta)$, la quale nei punti (ξ', η') di σ soddisfa all'equazione:

$$\Delta^4 g = 0$$

e nei punti $(\xi', \eta') \equiv (x, y)$ di s alle equazioni:

$$g = \frac{1}{4} r_1^2 \log r_1 \quad , \quad \frac{dg}{dn} = \frac{1}{4} \frac{d(r_1^2 \log r_1)}{dn} ,$$

dove r_1 indica il vettore che congiunge il punto (ξ, η) col punto variabile (x, y); e se si pone:

$$\mathrm{G}(\xi', \eta' ; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2 \log r}{4} - g \right)$$

con $r = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}$, l'integrale $u(\xi, \eta)$ delle equazioni (1) si può esprimere mediante la formola [2]

$$u(\xi, \eta) = \int_\sigma \mathrm{G}(\xi', \eta' ; \xi, \eta) f(\xi', \eta') \, d\sigma. \tag{2}$$

La funzione $\mathrm{G}(\xi', \eta' ; \xi, \eta)$, detta ordinariamente *2ª funzione di Green*, come si sa [3], *è simmetrica rispetto alle coppie di variabili* $\xi', \eta' ; \xi, \eta$ [4].

Esistenza di infiniti valori eccezionali.

2. Si considerino le equazioni:

$$\begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma) & \Delta^4 v = kv(\xi, \eta) + f(\xi, \eta), \\ \text{(nei punti di } s) & v = \dfrac{dv}{dn} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

con $f(\xi, \eta)$ funzione arbitraria, alla quale sia applicabile il *teorema di Poisson*, e con k parametro indipendente da ξ e da η.

Applicando la (2) si può scrivere:

$$v(\xi, \eta) - k \int_\sigma \mathrm{G}(\xi', \eta' ; \xi, \eta) v(\xi', \eta') \, d\sigma = \int_\sigma \mathrm{G}(\xi', \eta' ; \xi, \eta) f(\xi', \eta') \, d\sigma. \tag{4}$$

Donde risulta che *l'integrale* $v(\xi, \eta)$ *delle equazioni* (3) *è soluzione di un'equazione integrale di Fredholm a funzione caratteristica simmetrica.*

[1] Cfr. mia cit. Memoria sulle placche elastiche, art. I, pag. 68.

[2] Ibid., art. I, form. (10).

[3] Vedi Boggio T., *Sulle funzioni di Green d'ordine m* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XX).

[4] Per fare sulla formola (2) le verifiche al contorno s, basterà osservare che, quando il punto (ξ, η) si avvicina, secondo una direzione qualsiasi, ad un punto (x, y) di s, al limite si ha, in tutti i punti (ξ', η') dell'area σ, $\mathrm{G} = \dfrac{d\mathrm{G}}{dn} = 0$.

3. La teoria delle equazioni integrali a funzione caratteristica simmetrica ci dà [1]: *esiste una serie finita o infinita di valori reali, crescenti in valore assoluto, del parametro* k:

$$k_1, k_2, \dots, \tag{5}$$

e una corrispondente serie di funzioni:

$$p_1(\xi, \eta), p_2(\xi, \eta), \dots, \tag{5'}$$

tali che:

$$p_\nu(\xi, \eta) - k_\nu \int_\sigma G(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, p_\nu(\xi', \eta')\, d\sigma = 0, \tag{6}$$

$$\int_\sigma p_\mu\, p_\nu\, d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu, \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{7}$$

I valori assoluti di $k_1, k_2, \dots$, *nel caso che non siano in numero finito, hanno il solo punto limite* $k = \infty$.

Dalla (6) segue per le funzioni $p_\nu(\xi, \eta)$:

$$\begin{cases} (\text{nei punti di } \sigma) & \Delta^4 p_\nu = k_\nu\, p_\nu(\xi, \eta), \\ (\text{nei punti di } s) & p_\nu = \dfrac{dp_\nu}{dn} = 0\,; \end{cases} \tag{8}$$

e da queste si ha, in virtù di un noto risultato [2], che *i valori* (detti *eccezionali*) $k_1, k_2, \dots$ *sono tutti positivi*.

4. Vogliamo ora dimostrare che *la serie* (5) *dei valori eccezionali è infinita*.

Per fare ciò, osserveremo anzitutto che, in virtù della (6), le funzioni (dette *soluzioni eccezionali*) $p_\nu(\xi, \eta)$ sono tutte certamente finite e continue insieme alle loro derivate del primo ordine. D'altra parte l'equazione integrale:

$$\int_\sigma G(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, \theta(\xi', \eta')\, d\sigma = 0 \tag{9}$$

non ammette soluzione alcuna diversa da zero, finita e continua insieme alle sue derivate del primo ordine. Infatti si ha dalla (9), in virtù del noto *teorema di Poisson*,

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad \Delta^4 \int_\sigma G(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, \theta(\xi', \eta')\, d\sigma = \theta(\xi, \eta) = 0\,;$$

donde, in forza del secondo teorema al § 1 dell'art. I, risulta la proposizione che volevamo dimostrare [3].

[1] Schmidt, loc. cit., Zweites Kapitel.

[2] Mia cit. Mem. sulle placche elastiche, art. II, § 1.

[3] Facendo uso del *teorema di Poisson* nella forma di Stekloff (*Sur certaines égalités générales*, ecc., Mémoires de l'Ac. Imp. des Sc. de St.-Pétersbourg, vol. XV, n. 7), potevamo limitarci a considerare la sola continuità delle $p_\nu(\xi, \eta)$.

5. Dalla nota formola di Schmidt [1], relativa alla soluzione di un'equazione integrale di Fredholm a funzione caratteristica simmetrica, come la (4), si ha che l'integrale delle equazioni (3), per valori di k diversi da $k_1, k_2, \dots$, si può esprimere mediante la formola:

$$v(\xi, \eta) = \int_\sigma G(\xi', \eta'; \xi, \eta) f(\xi', \eta') d\sigma +$$
$$+ k \sum_\nu \frac{p_\nu(\xi, \eta)}{k_\nu - k} \int_\sigma p_\nu(\xi'', \eta'') \left\{ \int_\sigma G(\xi', \eta'; \xi'', \eta'') f(\xi', \eta') d\sigma \right\} d\sigma ;$$

ossia, ponendo mente alla simmetria della $G(\xi', \eta'; \xi'', \eta'')$ e facendo uso della (6),

$$v(\xi, \eta) = \int_\sigma G(\xi', \eta'; \xi, \eta) f(\xi', \eta') d\sigma +$$
$$+ k \sum_\nu \frac{p_\nu(\xi, \eta)}{k_\nu(k_\nu - k)} \int_\sigma p_\nu(\xi', \eta') f(\xi', \eta') d\sigma .$$

Sviluppi in serie di soluzioni eccezionali.

6. Supponiamo che *la funzione data* $f(\xi, \eta)$ *sia tale che l'espressione* $\Delta^4 f$ *risulti una funzione avente le derivate prime finite in tutti i punti dell'area* σ, *e che nei punti di* s *si abbia*:

$$f = \frac{df}{dn} = 0 .$$

Potremo scrivere, applicando la (2),

$$f(\xi, \eta) = \int_\sigma G(\xi', \eta'; \xi, \eta) \Delta^4 f . d\sigma .$$

Da questa formola, in virtù del noto teorema di sviluppabilità di Hilbert-Schmidt, *risulta*:

$$f(\xi, \eta) = \sum_\nu p_\nu(\xi, \eta) \int_\sigma f(\xi', \eta') p_\nu(\xi', \eta') d\sigma , \tag{10}$$

e la serie al secondo membro sarà convergente assolutamente ed uniformemente nel campo σ.

Posto poi:

$$d_\nu = \int_\sigma f(\xi', \eta') p_\nu(\xi', \eta') d\sigma ,$$

segue, dal teorema al § 2 dell'art. I, che *la serie*:

$$\sum_\nu k_\nu^2 d_\nu^2 \tag{11}$$

è convergente.

[1] Loc. cit, pag. 454.

Finalmente, se si osserva che le derivate della funzione $G(\xi', \eta' \,;\, \xi, \eta)$ del secondo ordine rispetto a ξ e a η si comportano come la funzione $\log r$, e se si applica il teorema al § 3 dell'art. I, avremo: *alla serie* (10) *è applicabile due volte il teorema di derivazione per serie rispetto a* ξ *e rispetto a* η, *e le serie derivate convergono assolutamente ed uniformemente nel campo* σ (*i punti di* s *inclusi*).

7. Avuto riguardo al fatto che nei punti di s la funzione p_ν e la sua derivata normale hanno valori nulli, si può scrivere, come è noto,

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad p_\nu(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \log r \,.\, \Delta^2 p_\nu \, d\sigma \,;$$

per cui, se si indica con $T_\nu(t)$ una funzione della nuova variabile t, dipendente da k_ν e indipendente da ξ e da η, e tale che sia sempre $|T_\nu(t)| \leq 1$, avremo per m e per q qualsiasi:

$$\sum_{m+1}^{m+q} {}_\nu \, d_\nu \sqrt{k_\nu}\, T_\nu(t)\, p_\nu(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \log r \sum_{m+1}^{m+q} {}_\nu \, d_\nu \sqrt{k_\nu}\, T_\nu(t)\, \Delta^2 p_\nu \, d\sigma \,.$$

Questa ci dà, in virtù della nota *disuguaglianza di Schwarz*,

$$\left\{ \sum_{m+1}^{m+q} {}_\nu \, d_\nu \sqrt{k_\nu}\, T_\nu(t)\, p_\nu(\xi, \eta) \right\}^2 \leq \int_\sigma \left(\frac{\log r}{2\pi} \right)^2 d\sigma \,.\, \int_\sigma \left\{ \sum_{m+1}^{m+q} {}_\nu \, d_\nu \sqrt{k_\nu}\, T_\nu(t)\, \Delta^2 p_\nu \right\}^2 d\sigma \,;$$

e poichè:

$$(12) \qquad \int_\sigma \Delta^2 p_\mu \,.\, \Delta^2 p_\nu \, d\sigma = \int_\sigma p_\mu \, \Delta^4 p_\nu \, d\sigma = k_\nu \int_\sigma p_\mu \, p_\nu \, d\sigma \,,$$

risulterà:

$$\left\{ \sum_{m+1}^{m+q} {}_\nu \, d_\nu \sqrt{k_\nu}\, T_\nu(t)\, p_\nu(\xi, \eta) \right\}^2 \leq \int_\sigma \left(\frac{\log r}{2\pi} \right)^2 d\sigma \sum_{m+1}^{m+q} {}_\nu \, k_\nu^2 \, d_\nu^2 \,.$$

Da questa formola, in virtù della convergenza della serie (11), segue facilmente che *la serie*:

$$\sum_\nu d_\nu \sqrt{k_\nu}\, T_\nu(t)\, p_\nu(\xi, \eta)$$

è convergente uniformemente nel campo di variabilità formato da σ *e dal campo di variabilità della* t.

Come conseguenza di questa proposizione, in virtù della (6), *si ha* (¹):

$$(13) \quad \sum_\nu \frac{d_\nu}{\sqrt{k_\nu}}\, T_\nu(t)\, p_\nu(\xi, \eta) = \int_\sigma G(\xi' \eta' \,;\, \xi, \eta) \sum_\nu d_\nu \sqrt{k_\nu}\, T_\nu(t)\, p_\nu(\xi', \eta')\, d\sigma \,.$$

(¹) I risultati fin qui stabiliti sono ancora validi, se al parametro k si sostituisce questo stesso parametro moltiplicato per una funzione $q(\xi, \eta)$ di segno invariabile nell'area σ. Basterà infatti rammentare un teorema di Goursat (Comptes rendus, 17 février 1908), secondo il quale, l'equazione integrale che ne risulta (della forma, detta da Hilbert, *polare*), si può sempre trasformare in un'equazione integrale a funzione caratteristica simmetrica (detta da Hilbert, *ortogonale*).

Problema delle vibrazioni delle piastre.

8. Lo studio delle vibrazioni di una piastra elastica incastrata, assoggettata a forze esterne indipendenti dal tempo t, della quale sono noti gli spostamenti iniziali e le velocità iniziali, dipende, come è noto, dal problema analitico di *trovare una funzione* $w(\xi, \eta, t)$, *la quale soddisfaccia alle equazioni*:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} + a^2 \varDelta^4 w = 0 ,$$

$$\text{(nei punti di } s) \quad w = \frac{dw}{dn} = 0 ,$$

$$\{ w(\xi, \eta, t) \}_{t=0} = f(\xi, \eta) \quad , \quad \left\{ \frac{dw}{dt} \right\}_{t=0} = \varphi(\xi, \eta),$$

dove a *è una costante dipendente dallo spessore della piastra, dalla sua densità e dai coefficienti di elasticità relativi alla materia di cui la piastra stessa è costituita; e dove* $f(\xi, \eta)$ *e* $\varphi(\xi, \eta)$ *sono due funzioni qualsiasi, le quali soddisfanno alle condizioni*:

$$\text{(nei punti di } s) \quad f = \frac{df}{dn} = 0 , \ \varphi = \frac{d\varphi}{dn} = 0 ,$$

e rappresentano rispettivamente gli spostamenti iniziali arbitrari e le velocità iniziali pure arbitrarie della piastra.

Se si fa l'ulteriore ipotesi che *le funzioni* $f(\xi, \eta)$, $\varphi(\xi, \eta)$ *siano tali che le espressioni* $\varDelta^4 f$, $\varDelta^4 \varphi$ *risultino funzioni aventi le derivate prime finite in tutti i punti dell'area* σ, potremo ad esse funzioni $f(\xi, \eta)$ e $\varphi(\xi, \eta)$ applicare i risultati dei paragrafi 6, 7.

Ciò premesso, si adottino per l'attuale funzione $f(\xi, \eta)$ le notazioni dei due precedenti paragrafi, e si ponga:

$$d'_\nu = \int_\sigma \varphi(\xi', \eta') \, p_\nu(\xi', \eta') \, d\sigma .$$

Avremo allora: *le due serie*

$$w_1(\xi, \eta, t) = \sum_\nu d_\nu \cos(ta\sqrt{k_\nu}) \, p_\nu(\xi, \eta),$$

$$w_2(\xi, \eta, t) = \sum_\mu \frac{d'_\mu}{a\sqrt{k_\mu}} \operatorname{sen}(ta\sqrt{k_\mu}) \, p_\mu(\xi, \eta)$$

rappresentano due funzioni finite e continue delle variabili ξ, η, t, *le quali soddisfano alle condizioni*:

$$\text{(nei punti di } s) \quad w_1(\xi, \eta, t) = 0 \quad , \quad w_2(\xi, \eta, t) = 0 ,$$

$$\{ w_1(\xi, \eta, t) \}_{t=0} = \sum_\nu d_\nu p_\nu(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) \quad , \quad \{ w_2(\xi, \eta, t) \}_{t=0} = 0 .$$

Le formole:

$$\frac{dw_1}{dt} = -a \sum_\nu d_\nu \sqrt{k_\nu}\, \mathrm{sen}\,(ta\sqrt{k_\nu})\, p_\nu(\xi, \eta),$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \sum_\mu d'_\mu \cos(ta\sqrt{k_\mu})\, p_\mu(\xi, \eta)$$

ci dicono che *le* $\frac{dw_1}{dt}$, $\frac{dw_2}{dt}$ *sono anche esse finite e continue e soddisfano alle condizioni*:

$$\left\{\frac{dw_1}{dt}\right\}_{t=0} = 0 \quad , \quad \left\{\frac{dw_2}{dt}\right\}_{t=0} = \sum_\mu d'_\mu\, p_\mu(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta).$$

Dal risultato alla fine del § 6 si ha che *esistono e sono finite e continue le derivate dei due primi ordini di* $w_1(\xi, \eta, t)$, $w_2(\xi, \eta, t)$ *rispetto a* ξ *e a* η *in tutto il campo* σ (*i punti di* s *inclusi*), *e che queste derivate si possono ottenere derivando per serie*. Per conseguenza *si ha ancora*:

$$(\text{nei punti di } s) \quad \frac{dw_1}{dn} = 0 \quad \frac{dw_2}{dn} = 0.$$

Dalla formola:

$$\frac{d^2 w_2}{dt^2} = -a \sum_\mu d'_\mu \sqrt{k_\mu}\, \mathrm{sen}\,(ta\sqrt{k_\mu})\, p_\mu(\xi, \eta) \tag{14}$$

segue poi che *la* $\frac{d^2 w_2}{dt^2}$ *è finita e continua*.

Applicando la (13) risulta inoltre che *la* $w_2(\xi, \eta, t)$ *ammette le derivate rispetto a* ξ *e a* η *dei primi tre ordini, che si possono ottenere derivando per serie*, e soddisfa all'equazione [1]:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad \Delta^4 w_2 = \frac{1}{a} \sum_\mu d'_\mu \sqrt{k_\mu}\, \mathrm{sen}\,(ta\sqrt{k_\mu})\, p_\mu(\xi, \eta).$$

Da questa equazione e dalla (14) si ricava che *la* $w_2(\xi, \eta, t)$ *soddisfa ancora all'equazione*:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad \frac{d^2 w_2}{dt^2} + a^2 \Delta^4 w_2 = 0.$$

Finalmente, *ammesso che la serie*:

$$\sum_\nu d_\nu k_\nu \cos(ta\sqrt{k_\nu})\, p_\nu(\xi, \eta) \tag{15}$$

[1] Basterà infatti rammentare la convergenza uniforme nel campo σ delle serie che rappresentano le derivate terze di w_2 e della serie al secondo membro della (14).

sia convergente uniformemente nel campo di variabilità formato da σ e dal campo di variabilità del tempo t, risulta:

$$\frac{d^2 w_1}{dt^2} = -a^2 \sum_\nu d_\nu k_\nu \cos(ta\sqrt{k_\nu})\, p_\nu(\xi, \eta),$$

e dalla (6):

$$(13)' \qquad \begin{aligned} w_1(\xi, \eta, t) &= \sum_\nu d_\nu \cos(ta\sqrt{k_\nu})\, p_\nu(\xi, \eta) = \\ &= \int_\sigma \mathrm{G}(\xi', \eta'; \xi, \eta) \sum_\nu d_\nu k_\nu \cos(ta\sqrt{k_\nu})\, p_\nu(\xi', \eta')\, d\sigma. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi: *la* $\frac{d^2 w_1}{dt^2}$ *è finita e continua, la* $w_1(\xi, \eta, t)$ *ha le derivate del terzo ordine rispetto a* ξ *e a* η *finite e continue e soddisfa all'equazione*:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad \frac{d^2 w_1}{dt^2} + a^2 \Delta^4 w_1 = 0.$$

Riassumendo, si ha che *la funzione*:

$$(16) \qquad \begin{aligned} w(\xi, \eta, t) &= w_1(\xi, \eta, t) + w_2(\xi, \eta, t) = \\ &= \sum_\nu \left\{ d_\nu \cos(ta\sqrt{k_\nu}) + \frac{d'_\nu}{a\sqrt{k_\nu}} \operatorname{sen}(ta\sqrt{k_\nu}) \right\} p_\nu(\xi, \eta) \end{aligned}$$

risolve completamente il problema enunciato al principio del presente paragrafo.

La forma (16) dell'espressione di $w(\xi, \eta, t)$ ci dice poi che *il moto vibratorio di una piastra elastica incastrata può ottenersi in generale mediante la sovrapposizione di infiniti moti vibratori elementari della specie*:

$$\left\{ d_\nu \cos(ta\sqrt{k_\nu}) + \frac{d_\nu}{a\sqrt{k_\nu}} \operatorname{sen}(ta\sqrt{k_\nu}) \right\} p_\nu(\xi, \eta).$$

9. Rammentiamo che, per giungere ai risultati testè enunciati, si è ammesso che la serie (15) fosse convergente uniformemente nel campo di variabilità formato da σ e dal tempo t. Può darsi che tale ipotesi possa dedursi senz'altro dalle condizioni già poste per la funzione $f(\xi, \eta)$. Noi qui dimostreremo che essa è certamente verificata, se si suppone inoltre che *la funzione* $f(\xi, \eta)$ *soddisfaccia alle condizioni*:

$$(\text{nei punti di } s) \quad \Delta^4 f = 0, \quad \frac{d\Delta^4 f}{dn} = 0,$$

abbia le derivate del quinto ordine rispetto a ξ *e a* η *finite e continue* *in tutto il campo σ (i punti di s inclusi) e l'espressione $\Delta^6 f$ sia atta all'integrazione nel campo σ.*

Infatti, in virtù della supposizione fatta, si ha:

$$\int_\sigma \Delta^6 f \,.\, \Delta^2 p_\nu \, d\sigma = \int_\sigma \Delta^4 f \,.\, \Delta^4 p_\nu \, d\sigma = k_\nu \int_\sigma p_\nu \,.\, \Delta^4 f \, d\sigma =$$

$$= k_\nu \int_\sigma f \,.\, \Delta^4 p_\nu \, d\sigma = k_\nu^2 \int_\sigma f p_\nu \, d\sigma = k_\nu^2 \, d_\nu \,;$$

per cui, rammentando la (12), risulta per i qualsiasi:

$$0 \leq \int_\sigma \left\{ \Delta^6 f - \sum_1^i{}_\nu \, d_\nu \, k_\nu \, \Delta^2 p_\nu \right\}^2 d\sigma = \int_\sigma \left\{ \Delta^6 f \right\}^2 d\sigma - \sum_1^i{}_\nu \, d_\nu^2 \, k_\nu^3 \,.$$

Da questa formola segue che la serie $\sum_\nu d_\nu^2 k_\nu^3$ è convergente; ed allora basterà ripetere sulla serie (15) i ragionamenti del § 7, per dimostrare appunto che *essa è convergente uniformemente nel campo di variabilità formato da σ e dal campo di variabilità del tempo t.*

Fisica — *Azione delle onde elettriche sull'allungamento per magnetostrizione di un filo di ferro magnetizzato longitudinalmente* (¹). Nota di L. Tieri, presentata dal Socio P. Blaserna.

Nel 1897 Rutherford mostrava (²) che fili sottili di ferro o di acciaio magnetizzati a saturazione costituiscono dei rivelatori di onde elettriche in quanto queste hanno per azione di alterare il momento magnetico del filo.

Marconi poi mostrava (³) che esiste sempre una variazione della magnetizzazione di un filo di ferro percorrente un ciclo magnetico e in generale in un punto qualunque dello stesso ciclo magnetico, sotto l'azione di onde elettriche. Le brusche variazioni del momento magnetico del filo venivano accusate da un telefono. Ora l'uso del telefono è comodo se l'apparecchio serve semplicemente da rivelatore di onde, ma non si presta per misure quantitative. Il metodo usato per queste misure è il magnetometrico, il quale però presenta parecchi inconvenienti (il principale, la lentezza con cui il magnetometro ci accusa le variazioni di energia magnetica del filo di ferro) inconvenienti che si eliminano se si ricorre al fenomeno della magnetostrizione.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.
(²) Phil. Trans. of the Roy. soc. of London, 1897.
(³) Proc. Roy. soc. London, 1902.