ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Meccanica. — *Sopra la distribuzione locale di azioni tangenziali sulla superficie di un suolo elastico.* Nota di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Corrispondente TULLIO LEVI-CIVITA.

Il modo di distribuzione di un sistema di pressioni *normali* agenti sui punti di una porzione limitata σ della superficie di un *suolo* elastico, omogeneo ed isotropo, si può ritenere definito quando sieno note le componenti normali degli spostamenti dei punti stessi [1].

Tale questione si può anzi far dipendere da un problema armonico ben determinato [2].

Essa trova importanti applicazioni: nel problema della distribuzione delle pressioni di un corpo pesante che sta in equilibrio sopra un piano orizzontale [3] e nel problema più generale, risoluto dall'Hertz, del contatto di due solidi elastici che vengono premuti normalmente uno contro l'altro [4].

Non meno importante, quantunque meno semplice, è il problema della distribuzione di azioni *tangenziali*. Il suo intervento si palesa, per es., nel caso di un solido pesante in equilibrio sopra un suolo inclinato scabro.

Esiste allora in ogni punto di σ oltre ad una pressione *normale*, anche una pressione *tangenziale* (secondo la linea di massima pendenza del piano inclinato). Dimodochè in σ si hanno due distribuzioni di pressioni: *normali* le une, *tangenziali* le altre, e le cui risultanti sono rispettivamente le componenti, normale e tangenziale, del peso del solido.

Nella presente Nota considero il problema nel suo aspetto generale e mostro come si possa dedurre la legge di distribuzione di un sistema di azioni tangenziali in σ, quando sieno note, in σ stesso (con manifesto significato delle notazioni), la *dilatazione superficiale*

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

è la *doppia componente normale di rotazione*

$$2\varpi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Applico i risultati ottenuti al problema della distribuzione delle pressioni dovute ad un corpo pesante che si appoggia sopra un suolo inclinato scabro.

(1) Cfr. Cerruti, *Ricerche intorno all'equilibrio de' corpi elastici isotropi* (Atti della R. Accademia dei Lincei, 1881-82, vol. XIII), pag. 119.

(2) Boussinesq, *Applications des potentiels*. Paris, 1885, pp. 221-224.

(3) Cfr. Cerruti, loc. cit., pag. 119 e Boussinesq, loc. cit., pp. 202-255.

(4) Cfr. Love, *Lehrbuch der Elasticität* (Leipzig und Berlin, 1907, trad. tedesca del *Timpe*), pp. 227-233.

Assegno quindi l'integrale generale della distribuzione di pressioni tangenziali nell'interno di σ nell'ipotesi particolare che quivi sieno nulle ϑ e ϖ.

Il grado di arbitrarietà è quello di una funzione $f(\zeta)$ della variabile complessa $\zeta = x + iy$, regolare entro σ (contorno incluso).

Il caso $f = c$ (c costante reale) corrisponde ad un'unica distribuzione di azioni tangenziali (parallele all'asse x). La densità di tale distribuzione coincide con quella d'equilibrio di una carica elettrica sopra σ, supposto che σ rappresenti un disco conduttore isolato [1].

1. *Formole generali.* — Prendiamo a considerare un *suolo* elastico, omogeneo ed isotropo, cioè un solido elastico, indefinito che occupa uno dei semispazî separati da un piano illimitato.

Assumiamo tale piano come piano $z = 0$ di un sistema di assi cartesiani ortogonali, coll'asse z diretto verso l'interno del semispazio S occupato dal mezzo elastico.

Sopra una porzione limitata σ, del piano $z = 0$, agiscano delle forze di componenti L, M, N, cui corrispondono (nell'equilibrio) spostamenti superficiali di componenti u, v, w. Riterremo che le forze superficiali sieno nulle fuori di σ.

Designi r la distanza di un punto (x, y, z) di S da un punto $(x_1, y_1, 0)$ di σ, sia cioè

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 .$$

Poniamo

$$U_1 = \iint \frac{L}{r}\, dx_1\, dy_1 \quad , \quad U_2 = \iint \frac{M}{r}\, dx_1\, dy_1 \quad , \quad U_3 = \iint \frac{N}{r}\, dx_1\, dy_1 ;$$

$$V_1 = \iint L \log(z + r)\, dx_1\, dy_1 \quad , \quad V_2 = \iint M \log(z + r)\, dx_1\, dy_1 ,$$

$$V_3 = \iint N \log(z + r)\, dx_1\, dy_1 ;$$

$$W_1 = \iint L[z \log(z + r) - r]\, dx_1\, dy_1 \quad , \quad W_2 = \iint M[z \log(z + r) - r]\, dx_1 dy_1 ,$$

$$W_3 = \iint N[z \log(z + r) - r]\, dx_1\, dy_1 ;$$

$$\Psi = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} ,$$

$$\chi = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} ,$$

le integrazioni andando estese a tutti i punti di σ.

[1] Spero di potermi occupare prossimamente di una interessante applicazione dei risultati ottenuti al problema del contatto di due solidi elastici i quali vengano premuti (anche obliquamente) uno contro l'altro.

È noto che non soltanto le U_i $(i=1, 2, 3)$, ma anche le V_i e W_i [1], sono funzioni potenziali di superficie, soddisfanno tutte all'equazione di Laplace in S, e di più sono legate dalle relazioni

$$U_i = \frac{\partial V_i}{\partial z} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial z^2} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Per le posizioni fatte, le formole di Cerruti [2], che legano gli spostamenti u, v, w di un generico punto di S alle pressioni superficiali in σ, divengono

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \\ &\qquad + \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y}\right), \\ v &= \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{1}{4\pi(A-B)}\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \\ &\qquad - \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y}\right), \\ w &= \frac{1}{4\pi B}\frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{\Psi}{4\pi(A-B)} - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

In esse A e B designano le costanti di isotropia del mezzo. Dalle prime due di queste, derivando e tenendo presenti le (1) si ricava

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4\pi B}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) - \\ - \frac{1}{4\pi(A-B)}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right) - \frac{z}{4\pi B}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4\pi B}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y}\right) - \\ - \frac{1}{4\pi B}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y}\right]\right)$$

ed essendo per le (1)

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z}\right\} = \\ = -\left\{\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y}\right] = \\ = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y}\right] = -\left\{\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y}\right\},$$

[1] Poussinesq, loc. cit., pp. 59 e 60

[2] Loc. cit., formole (63) e (58). Cfr. anche Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, pp. 125-126.

avremo in definitiva

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{A}{4\pi B(A-B)}\left\{\dfrac{\partial U_1}{\partial x}+\dfrac{\partial U_2}{\partial y}\right\}+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\dfrac{1}{4\pi(A-B)}\dfrac{\partial U_3}{\partial z}+\dfrac{z}{4\pi B}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2\pi B}\left\{\dfrac{\partial U_2}{\partial x}-\dfrac{\partial U_1}{\partial y}\right\}. \end{cases}$$

Ponendo $z=0$ e introducendo la *dilatazione superficiale*

$$\vartheta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

e la *componente normale della doppia rotazione*

$$2\varpi=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

delle particelle di σ, avremo

$$(4)\quad \begin{cases} \vartheta=\dfrac{A}{4\pi B(A-B)}\left\{\dfrac{\partial U_1}{\partial x}+\dfrac{\partial U_2}{\partial y}\right\}+\dfrac{1}{4\pi(A-B)}\dfrac{\partial U_3}{\partial z}, \\ \varpi=\dfrac{1}{4\pi B}\left\{\dfrac{\partial U_2}{\partial x}-\dfrac{\partial U_1}{\partial y}\right\}; \end{cases}$$

formole notevoli che applicheremo tosto.

2. *Posizione del problema della distribuzione delle pressioni dovute ad un corpo pesante che poggia sopra un suolo inclinato, scabro.* — Assumiamo nel piano $z=0$ come asse delle x la linea di massima pendenza del piano stesso, diretta verso il basso. Sia σ l'area di contatto del corpo colla superficie del suolo.

In ogni punto di σ avremo una pressione incognita di componenti L, O, N. Chiamando P il peso del corpo, i l'inclinazione del piano sull'orizzonte, sarà

$$\int_\sigma L d\sigma = P \operatorname{sen} i,$$

$$\int_\sigma N d\sigma = P \cos i.$$

In σ abbiamo dunque: una distribuzione di pressioni *tangenziali* L e una distribuzione di pressioni *normali* N.

Chiamo u', v', w' gli spostamenti dovuti solamente al sistema di pressioni tangenziali; u'', v'', w'' quelli corrispondenti al sistema delle pressioni normali. Per la natura lineare ed omogenea delle (2) saranno

$$u=u'+u'',$$
$$v=v'+v'',$$
$$w=w'+w'',$$

le componenti degli spostamenti dovuti ai due sistemi di pressioni agenti simultaneamente.

Sieno ora in σ, ϑ' e ϖ' la dilatazione superficiale, e la componente normale della rotazione, dovute alle sole azioni tangenziali L.

Avremo dalle (4)

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{4\pi B(A-B)}{A}\vartheta',$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = -4\pi B\varpi',$$

dalle quali ancora

$$(5) \qquad U_1 = 4\pi B \int \left[\frac{A-B}{A}\vartheta' dx - \varpi' dy\right] + \text{costante (nei punti di } \sigma):$$

Sieno w'' le componenti normali degli spostamenti dei punti di σ dovuti alle sole azioni normali N.

Dalla terza delle (2), tenendo presenti le (1), si ricava

$$w'' = \frac{A}{4\pi B(A-B)} U_3,$$

ovvero

$$(6) \qquad U_3 = \frac{4\pi B(A-B)}{A} w'' \quad \text{(nei punti di } \sigma).$$

Siamo ora in grado di determinare le distribuzioni di pressioni L ed N in σ, quando sieno note in σ stessa: ϑ', ϖ', w''.

La questione si riduce, infatti, alla determinazione di due funzioni, finite e continue U_1, U_3, armoniche nel semispazio S occupato dalla massa elastica, e tali che sul piano limite $z=0$ assumano i valori definiti rispettivamente dalle (5) e (6) entro σ, mentre fuori di σ si annullino le $\frac{\partial U_1}{\partial z}$, $\frac{\partial U_3}{\partial z}$ (punto all' ∞ compreso). Quest'ultima condizione risulta manifestamente dalla duplice circostanza che le U_1 e U_3 sono simmetriche rispetto al piano $z=0$ e ammettono nei punti di questo piano, esterni a σ, derivate normali continue.

Come è noto, le funzioni U_1 e U_3 riescono pienamente determinate. Trovate le U_1 e U_3, la L e la N sono definite dalle formole [1]

$$L = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)_{z=0},$$

$$N = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial U_3}{\partial z}\right)_{z=0}.$$

Tali formole risolvono il problema che ci siamo proposti.

[1] Cfr. per es. Cesàro, loc. cit., pag. 83.

Da esse direttamente apparisce che

$$L = 0 \quad , \quad N = 0$$

fuori di σ, precisamente come si voleva.

Osservazione. — Quando in superficie $z = 0$ si ha $N = 0$, cioè quando i punti della superficie stessa sono soggetti ad azioni *puramente tangenziali, la dilatazione cubica nei punti della superficie è proporzionale tanto alla dilatazione superficiale, quanto alla dilatazione lineare di un elemento ad essa normale.*

Infatti, dalla terza delle note *equazioni ai limiti* [1], nella fatta ipotesi, si ha

$$(7) \qquad (A - 2B)\,\Theta' + 2B\,\frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \qquad (\text{per } z = 0),$$

dove

$$\Theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \vartheta' + \frac{\partial w'}{\partial z}.$$

Per questa, la (7) può anche trasformarsi nella

$$(8) \qquad (A - 2B)\,\vartheta' + A\,\frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

Da questa e dalla (7) scende quanto abbiamo asserito.

Le (7) e (8) definiscono ϑ' quando sieno noti in σ: o la $\frac{\partial w'}{\partial z}$, oppure la dilatazione cubica Θ'.

Siccome abbiamo già accertato che la distribuzione di pressioni tangenziali L in σ è determinata, quando sieno noti in σ stesso la componente normale di rotazione ϖ' e la dilatazione superficiale ϑ' (dovute alle sole pressioni L), per l'osservazione dianzi fatta, possiamo aggiungere che *la predetta distribuzione è determinata anche quando sieno dati in* σ: *la* ϖ' *e la dilatazione cubica* Θ'; *oppure la* ϖ' *e la dilatazione lineare* $\frac{\partial w'}{\partial z}$ *(dovute sempre alle sole azioni tangenziali* L).

3. *Integrale generale corrispondente al caso in cui, entro* σ, *è* $\vartheta' = \varpi' = 0$. — Noti ϑ' e ϖ' nei punti di σ, si sa determinare in modo completo (vedi n. 2) la distribuzione di pressioni tangenziali L, cui esse corrispondono, se (come nel caso del corpo pesante che si trova in equilibrio sopra un piano inclinato) si sa che queste azioni hanno tutte una medesima direzione.

La questione rimane invece indeterminata se si conoscono ϑ' e ϖ', e si sa solo che esse sono dovute ad azioni tangenziali.

[1] Cfr. per es. Cesàro, loc. cit., pag. 42.

In tal caso, per le (4), si ha

$$\vartheta' = \frac{A}{4\pi B(A-B)}\left\{\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right\} \qquad \text{(per i punti di } \sigma\text{)}.$$

$$\varpi' = \frac{1}{4\pi B}\left\{\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y}\right\}$$

Prendiamo a considerare il caso in cui, in tutta l'area σ è

$$\vartheta' = \varpi' = 0.$$

Le precedenti allora danno

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y} = 0.$$

Queste ci dicono che U_1 e $-U_2$ in σ si possono risguardare rispettivamente come parte reale e coefficiente dell'immaginario di una funzione della variabile complessa

$$\zeta = x + iy.$$

Perciò, posto

(9) $$U_1 - iU_2 = \varphi(\zeta),$$

possiamo dire che *ad ogni funzione* $\varphi(\zeta)$, *regolare entro l'area* σ *(contorno incluso), corrispondono due speciali distribuzioni* L e M *di azioni tangenziali nei punti di* σ *stesso: le prime parallele all'asse* x *e le seconde parallele all'asse* y.

Infatti, assegnata ad arbitrio la $\varphi(\zeta)$ in σ, rimangono definite, per la (9), le espressioni di U_1 e U_2 in σ stesso; allora, a norma di quanto abbiamo detto nel numero 2, rimangono definite le U_1 e U_2 in tutto il semispazio S, ed avremo

$$L = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)_{z=0},$$

$$M = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial U_2}{\partial z}\right)_{z=0}.$$

Prendendo in particolare

$$\varphi = c,$$

dove c designa una costante reale, dalla (9) scende

(10) $$U_1 = c \quad , \quad U_2 = 0, \qquad \text{(nei punti di } \sigma\text{)}.$$

Annullandosi U_2 in σ e la sua derivata normale fuori di σ (nel piano $z = 0$),

sarà $U_2 = 0$ in tutto il semispazio S, e quindi intanto

$$M = 0.$$

Riguardo alla distribuzione delle pressioni L, essa è definita, per la prima delle (10), da una relazione del tipo

$$L = P \cdot f(x, y),$$

dove la P è uguale alla risultante delle azioni L e la $f(x, y)$ designa una funzione dipendente soltanto dalla forma dell'area σ; essa si può valutare caso per caso senza difficoltà concettuali.

Osservazione. — È interessante notare che $f(x, y)$ *è la densità della distribuzione di equilibrio di una carica elettrica sopra* σ, *supposto che* σ *rappresenti un disco conduttore isolato.*

Mineralogia. — *Aloisiite, nuovo idrosilicato dei tufi di Fort Portal (Uganda)* [1]. Nota del dott. Luigi Colomba, presentata dal Socio G. Spezia.

Fra i materiali delle collezioni petrografiche fatte dal dott. A. Roccati durante la spedizione di S. A. R. il Duca degli Abruzzi al Ruwenzori, degna di nota è una serie di esemplari provenienti dai dintorni di Fort Portal, nel regno di Toro, località collocata lungo la falda orientale del massiccio del Ruwenzori e nella quale si hanno tracce abbastanza importanti di manifestazioni vulcaniche, attualmente però del tutto estinte.

Queste formazioni vulcaniche non sono del resto solamente limitate ai dintorni di Fort Portal, poichè da quanto risulta per le ricerche degli autori che si occuparono delle dette regioni, esse appariscono sviluppate anche lungo la falda meridionale del Ruwenzori, formando una successione continua che dai dintorni di Katvè, sul lago Alberto Edoardo, giunge sino a Fort Portal essendo anche probabile che si estenda oltre questa località verso settentrione.

Scott Elliot [2], il quale in particolar modo si occupò dello sviluppo di queste formazioni vulcaniche, le suddivise in un certo numero di serie, essendo appunto l'ultima, da lui indicata col nome di *serie del lago Vijongo*, quella che si può determinare nei dintorni di Fort Portal.

Il carattere fondamentale di tutte queste formazioni vulcaniche è quello di essere costituite esclusivamente da tufi; tale fatto risulta, oltre che dalle brevi osservazioni compiute da Gregory [3] e Prior [4] su materiale prove-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto mineralogico della R. Università di Torino.

[2] *Naturalist, in Mid. Africa.* London 1906.

[3] (e Scott Elliot). *On the Geology of Mount Ruwenzori.* Quart. Journ. of Geol. Soc., LI (1895).

[4] *Contributions of the Petrology of British East Africa.* Min. Mag. XIII, 61, (1903) pag. 228.