# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XVII.**

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

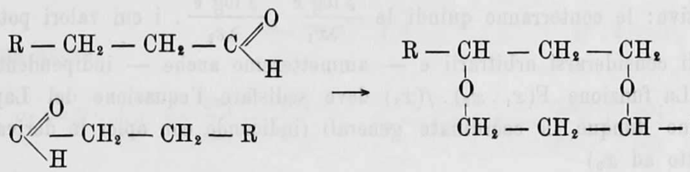
1908

bonato di sodio in eccesso. Si lavò in seguito il residuo insolubile con acqua, si asciugò su carta e si dissecco nel vuoto sull'acido solforico. Il peso di essa è gr. 0,83; fonde a 181-182° ed all'analisi dette:

| | Trovato | Calcolato |
|---|---|---|
| C | 72,72 | 73,17 |
| H | 7,58 | 7,32 |

Il che dimostra essere la sostanza primitiva inalterata.

Per esclusione si deve ritenere che i due atomi di ossigeno del dimero dell'aldeide siano sotto forma di ossido alchilico come ad es. nello schema:



## Matematica. — *Le varietà con tre dimensioni che ammettono per l'equazione del Laplace l'integrale* $F(x_1, x_2) f(x_3)$. Nota di F. A. Dall'Acqua, presentata dal Corrispondente Levi-Civita.

Argomento di questa Nota è una generalizzazione di un notissimo problema di Lamè ([1]), e può enunciarsi così:

« Determinare l'elemento lineare di una varietà con tre dimensioni in « guisa che l'equazione del Laplace ammetta un integrale della forma « $F(x_1, x_2) f(x_3)$, dove F contiene due ed $f$ una costante, arbitrarie e non « moltiplicative ».

Qui ed in seguito, sempre, indico con lettere latine maiuscole le funzioni indipendenti da $x_3$, con lettere latine minuscole quelle indipendenti da $x_1, x_2$ ([2]), con lettere greche tutte le altre.

I risultamenti cui giungo sono i seguenti, abbastanza semplici:

« Esistono due tipi per il quadrato dell'elemento lineare della varietà « cercata, tipi che si possono scrivere rispettivamente

$$ds^2 = \left[\sum_{1}^{2}{}_{h,k} (qA_{hk} + rB_{hk} + sC_{hk})\, dx_h\, dx_k\right] + (D\boldsymbol{H}\, dx_3)^2$$

$$ds^2 = \lambda \sum_{1}^{2}{}_{h,k} A_{hk}\, dx_h\, dx_k + (\lambda B\, dx_3)^2$$

« dove $\boldsymbol{H}^2$ è il discriminante della forma racchiusa entro parentesi quadra.

([1]) Cfr. Darboux, *Leçons sur les Systèmes orthogonaux et les Coordonnées curvilignes*. Paris, 1898, L. II, C. III, § 121 e segg.

([2]) Eccezion fatta per i coefficienti $a_{rs}$ del quadrato dell'elemento lineare.

« È notevole che nell'uno e nell'altro caso le superfici $x_3 = \text{cost}$ sono « ortogonali alle $x_1 = \text{cost}$, $x_2 = \text{cost}$, e costituiscono una famiglia iso- « terma ».

1. Cominciamo dal considerare la portata delle nostre ipotesi.

La funzione $f(x_3)$ contiene una costante arbitraria *non moltiplicativa*: quindi la conterrà anche la $\dfrac{\partial \log f}{\partial x_3}$, che avrà perciò essa pure un grado di arbitrarietà.

Analogamente la $\mathrm{F}(x_1, x_2)$ contiene *due* costanti arbitrarie non moltiplicative: le conterranno quindi le $\dfrac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial x_1}, \dfrac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial x_2}$, i cui valori potranno quindi considerarsi arbitrarii e — ammetteremo anche — indipendenti.

La funzione $\mathrm{F}(x_1, x_2) \,.\, f(x_3)$ deve sodisfare l'equazione del Laplace. Avremo dunque in coordinate generali (indicando con apici le derivazioni rispetto ad $x_3$)

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} & f'' \mathrm{F} a^{(33)} + f' \left[ \sum_1^2{}_h \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_h} a^{(3h)} + \mathrm{F} \underset{2}{\Delta} x_3 \right] + \\ & + f \left[ \sum_1^2{}_{h,k} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_h \partial x_k} a^{(hk)} + \sum_1^2{}_h \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_h} \underset{2}{\Delta} x_h \right] = 0 . \end{aligned}$$

Se facciamo in questa $x_1$ e $x_2$ costanti (possiamo senza ledere la generalità porre $x_1 = x_2 = 0$) la (A) assume la forma: $f'' + f'p + fq = 0$, o scegliendo opportunamente il parametro $x_3$

$$f'' + fq = 0 .$$

Per questa la (A) si riduce a contenere solo la $f'$ e la $f$, o meglio la $\dfrac{d \log f}{d x_3}$, e per l'osservazione fatta sopra dovrà essere soddisfatta per ogni valore di questa derivata. Essa quindi si scinderà nelle due

$$\text{(B)} \qquad \sum_1^2{}_h \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_h} a^{(3h)} + \mathrm{F} \underset{2}{\Delta} x_3 = 0$$

$$\text{(C)} \qquad \sum_1^2{}_{h,k} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_h \partial x_k} a^{(hk)} + \sum_1^2{}_h \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_h} \underset{2}{\Delta} x_h - \mathrm{F} q a^{(33)} = 0 .$$

Queste pure, per l'osservazione già fatta, devono essere soddisfatte per ogni valore di $\dfrac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial \log \mathrm{F}}{\partial x_2}$. La (B) si scinderà quindi alla sua volta nelle

$$\text{(1)} \qquad \begin{gathered} a^{(13)} = 0 \;, \; a^{(23)} = 0 \\ \underset{2}{\Delta} x_3 = 0 . \end{gathered}$$

Quindi le superficie $x_3 = \text{cost}$ sono ortogonali alle $x_1 = \text{cost}$, $x_2 = \text{cost}$, e costituiscono una famiglia isoterma.

La $\underset{2}{\Delta} x_3 = 0$ sviluppata e integrata dà immediatamente

$$a^{(33)} \sqrt{a} = \mathrm{D}\,. \tag{2}$$

2. Poniamo per comodità

$$a_{11} = \alpha_4 \mathrm{D} \quad , \quad a_{22} = \alpha_2 \mathrm{D} \quad , \quad a_{12} = -\alpha_3 \mathrm{D}\,. \tag{3}$$

Sarà allora

$$\alpha_{r+s} = a^{(rs)} \sqrt{a} \qquad (r\,, s = 1\,, 2).$$

Porremo anche

$$\alpha_5 = \sqrt{a}\, \underset{2}{\Delta} x_1 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} \quad ; \quad \alpha_6 = \sqrt{a}\, \underset{2}{\Delta} x_2 = \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_4}{\partial x_2} \tag{4}$$

e talvolta scriveremo anche

$$\alpha_1 = q\mathrm{D}.$$

Faremo inoltre

$$(\alpha_h)_{x_3=0} = \mathrm{A}_h \quad ; \quad (\alpha_h)_{x_3=h_0} = \mathrm{B}_h \qquad (h_0 = \text{cost}).$$

Con queste posizioni la (C) assume la forma

$$\sum_1^2{}_{h,k} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_h\, \partial x_k} \alpha_{h+k} + \sum_1^2{}_h \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_h} \alpha_{4+h} - \mathrm{F}\alpha_1 = 0\,.$$

È poi ovvia la forma che assumerebbero le equazioni che si traggono da questa per $x_3 = 0$ e per $x_3 = h_0$.

Queste tre equazioni — se indichiamo con $\Delta_{rst}$ il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_r & \alpha_s & \alpha_t \\ \mathrm{A}_r & \mathrm{A}_s & \mathrm{A}_t \\ \mathrm{B}_r & \mathrm{B}_s & \mathrm{B}_t \end{vmatrix}$$

— si possono facilmente risolvere sispetto alle derivate seconde di F (purchè $\Delta_{234} \neq 0$). Avremo

$$(\mathrm{C}')\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_1^2} &= \mathrm{F}\frac{\Delta_{134}}{\Delta_{234}} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}\frac{\Delta_{534}}{\Delta_{234}} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}\frac{\Delta_{634}}{\Delta_{234}} \\ 2\,\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_1\, \partial x_2} &= \mathrm{F}\frac{\Delta_{214}}{\Delta_{234}} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}\frac{\Delta_{254}}{\Delta_{234}} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}\frac{\Delta_{264}}{\Delta_{234}} \\ \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_2^2} &= \mathrm{F}\frac{\Delta_{231}}{\Delta_{234}} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}\frac{\Delta_{235}}{\Delta_{234}} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}\frac{\Delta_{236}}{\Delta_{234}} \end{aligned} \right.$$

I primi membri di queste sono indipendenti da $x_3$: dovranno quindi essere tali i secondi membri, e tali quindi — per la osservazione già ricordata — i coefficienti della F e delle sue derivate.

La condizione trovata, per i coefficienti di una delle tre equazioni, si scrive (sviluppando i determinanti $\Delta$)

$$(5)\qquad \alpha_1 = \sum_2^4{}_h\, \alpha_h P_h \quad ; \quad \alpha_5 = \sum_2^4{}_h\, \alpha_h Q_h \quad ; \quad \alpha_6 = \sum_2^4{}_h\, \alpha_h R_h :$$

per i coefficienti delle altre due essa è allora identicamente sodisfatta. Infatti, se insieme con le (5) consideriamo quelle che se ne ottengono facendovi una volta $x_3 = 0$ e una volta $x_3 = h_0$, otteniamo le colonne di indice $1, 5, 6$ (nei determinanti $\Delta$) espresse linearmente per le colonne di indice $2, 3, 4$. Se le colonne $1, 5, 6$ si sostituiscono, nei $\Delta$ che le contengono, con tali espressioni, si vede facilmente che le P rappresentano i coefficienti di F, le Q i coefficienti di $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, le R i coefficienti di $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, nelle (C'). Tali coefficienti riescono quindi indipendenti da $x_3$, come avevamo asserito.

3. Ritorniamo alle equazioni (5). Le due ultime, ricordando le (4), facilmente si scrivono:

$$(5')\qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} = \sum_2^4{}_h\, \alpha_h Q_h \quad ; \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_4}{\partial x_2} = \sum_2^4{}_h\, \alpha_h R_h .$$

Queste evidentemente ammettono dei sistemi di integrali indipendenti da $x_3$. Indicandone tre. linearmente indipendenti (1), con

$$\alpha_h = L_h \quad , \quad \alpha_h = M_h \quad , \quad \alpha_h = N_h \qquad (h = 2, 3, 4)$$

sarà pure un sistema integrale

$$\alpha_h = tL_h + rM_h + sN_h \qquad (h = 2, 3, 4).$$

Queste dovranno soddisfare la prima delle (5)

$$qD = \sum_2^4{}_h\, \alpha_h P_h ,$$

e quelle che se ne traggono per derivazione rispetto ad $x_3$. È facile riconoscere allora che deve essere (p. es.) $t = q$ e

$$(6)\qquad \sum_2^4{}_h\, M_h P_h = 0 \quad , \quad \sum_2^4{}_h\, N_h P_h = 0;$$

e se $q \neq 0$

$$\sum_2^4{}_h\, L_h P_h = D.$$

(1) Che essi esistano si vede facilmente, ricordando noti teoremi di Calcolo. Si sa infatti che scelto $\alpha_4$ ad arbitrio ci sono due soli integrali $\alpha_2(x_1, x_2)$, $\alpha_3(x_1, x_2)$ del sistema (5'), che per $x_1 = x_1^{(0)}$ si riducono a due funzioni prefissate $u(x_2)$, $v(x_2)$. L'arbitrarietà poi di $\alpha_1, u, v$ assicura che il determinante $\| L_1 M_2 N_3 \|$ è diverso da zero per $x_1 = x_1^{(0)}$ e quindi per valori di $x_1$ che si scostino abbastanza poco da questo.

Queste sono sempre possibili per opportuni valori delle P. Queste, e queste soltanto, se le P sono diverse da zero [1]. Quindi non esiste in tal caso un sistema integrale del tipo trovato,, con più di 3 termini.

È poi facile riconoscere che questo sistema integrale trinomio (per $P_2, P_3, P_4$ non tutte nulle) è il più generale possibile [2].

Abbiamo così finalmente, ricordando le (3) e le (1), (2), e scrivendo $A_{hk}, B_{hk}, C_{hk}$ in luogo di $L_hD, M_hD, N_hD$ (i simboli con due indici sono simmetrici) e $1:D$ in luogo di $D$:

$$(7)\qquad \begin{cases} a_{hk} = qA_{hk} + rB_{hk} + sC_{kh} & (h, k = 1, 2): \\ a_{13} = 0 \quad , \quad a_{23} = 0 \quad , \quad a_{33} = D^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \end{cases}$$

4. Ed ora veniamo ai casi esclusi: 1°. $P_2 = P_3 = P_4 = 0$; 2°. $\Delta_{234} = 0$ ammettendo però che la matrice

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

non sia identicamente nulla. Allora, al più scegliendo opportunamente la costante $h_0$, non sarà identicamente nulla neppure la matrice

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_4 \\ B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} = M\,.$$

Siano intanto nulle le P. Ricordando il loro significato, si ha tosto

$$\Delta_{134} = \Delta_{214} = \Delta_{231} = 0\,.$$

L'ultima, introducendo due indeterminate $\lambda$ e $\mu$, si scrive

$$(8)\qquad \alpha_h = \lambda A_h + \mu B_h$$

dove $h = 1, 2, 3$. Le altre due, ricordando che la matrice M non è identicamente nulla, mostrano che la (8) vale anche per $h = 4$ e che è quindi $\Delta_{234} = 0$.

Basta dunque considerare il caso $\Delta_{234} = 0$: le (C') (prima della divisione ivi effettuata per $\Delta_{234}$) portano allora, per l'osservazione più volte ricordata, che siano nulli tutti i $\Delta$ che in esse compaiono. Come nel caso delle P nulle, varranno le (8), e varranno per ogni indice $h$ da 1 a 6. Eli-

[1] Invero un quarto integrale $\alpha_h = T_h$ dovrebbe soddisfare ad una equazione del tipo (6). Il determinante del sistema (6) così completato dovrebbe esser nullo, e quindi le T linearmente dipendenti dalle M e dalle N. L'integrale conserva quindi la sua forma $\alpha_h = qL_h + rM_h + sN_h$.

[2] Lo si vede p. es. facilmente, supponendo il sistema integr. gen. sviluppabile in serie di potenze di $x_3$.

minando fra queste e le (4) le $\alpha$, si ottiene $\lambda = t$, $\mu = r$ [1], e con semplici modificazioni formali $\lambda = q$, $\mu = r$. Abbiamo così un caso particolare delle (7) ($s = 0$).

5. E finalmente esaminiamo l'ultimo caso: la matrice

$$\begin{Vmatrix} A_2 & A_3 & A_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{Vmatrix}$$

è identicamente nulla. Se ne trae

$$\alpha_h = \lambda A_h \qquad (h = 2\,,3\,,4).$$

Allora tutti i $\Delta$ risultano nulli, e le (C′) identicamente sodisfatte.

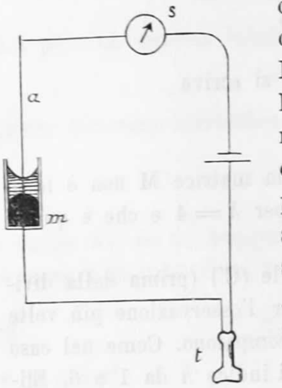
I coefficienti del quadrato dell'elemento lineare assumono la forma

$$(r\,,s = 1\,,2) \qquad a_{rs} = \lambda A_{rs} \quad , \quad a_{13} = a_{23} = 0 \quad , \quad a_{33} = \lambda^2 B^2$$

dove abbiamo indicato con $B^2$ l'espressione positiva $(A_{11}\,A_{22} - A_{12}^2) : D^2$, e con $\lambda$ una funzione completamente arbitraria.

## Fisica. — *Su un rivelatore di onde elettriche.* Nota di L. Tieri e U. Cialdea, presentata dal Socio P. Blaserna.

Una goccia di mercurio $m$ (vedi fig.) comunica col polo negativo di una pila Warren de la Rue, il polo positivo della quale è in comunicazione con un sottilissimo ago da cucire $a$. La superficie libera del mercurio è ricoperta da uno strato di liquido cattivo conduttore purissimo e assolutamente anidro. Per mezzo di un congegno micrometrico al quale l'ago è rigidamente connesso, si sposta l'ago in modo che venga a sfiorare appena il menisco di mercurio. Tale apparecchio è pronto per rivelare la presenza di onde elettromagnetiche quando un milliamperometro $s$ inserito nel circuito accusa il passaggio di una corrente di due o tre milli-ampère. Anche un telefono $t$ inserito nel circuito ci accusa per mezzo di un soffio quando l'apparecchio è al suo massimo di sensibilità. In tali condizioni esso rivela le onde generate da un campanello elettrico a circuito chiuso posto alla distanza di circa otto metri, purchè si abbia l'avvertenza di adoperare del mercurio purissimo e l'ago con punta pulita.




[1] Si ottengono quattro equazioni lineari omogenee nelle derivate prime di $\lambda$ e $\mu$ rispetto a $x_1$ e $x_2$. Il determinante del sistema non è identicamente nullo, come si vede p. es. se si prende $h_0$ tale che $(q)_{x_2=h_0} = 0$.