ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Matematica. — *Sulla formula integrale di Fourier* [1]. Nota di LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondende T. LEVI-CIVITA.

Nel classico trattato di fisica matematica di Riemann-Weber [2] è contenuto quanto basta per asserire che la formula integrale di Fourier si può considerare stabilita quando sia stabilita la formula preliminare

$$(1) \qquad \int_0^\infty d\alpha \int_c^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = 0 \qquad (c > 0).$$

Il numero positivo fisso c, che figura in questa formula, si può ritenere arbitrariamente alto, per virtù di quest'altra relazione

$$\int_0^\infty d\alpha \int_b^c \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = 0 \qquad (b > 0),$$

chiaramente e rigorosamente dimostrata nel medesimo libro.

Per la validità della (1) sono ivi imposte alcune condizioni alla funzione $\psi(\lambda)$. Accettando senz'altro quelle che non hanno relazione col limite infinito dell'integrale che figura a destra nella (1), fisseremo invece l'attenzione sulle tre seguenti:

I. Esiste un numero fisso c, tale che per $\lambda \geqq c$ la funzione $\psi(\lambda)$ non cresca mai o non drecresca mai col crescere di λ (qui la considereremo, per esempio, non crescente).

II. La funzione $\psi(\lambda)$ tende a zero per λ infinito (supporremo dunque che $\psi(\lambda)$ per $\lambda \geqq c$ non sia mai negativa).

III. L'integrale $\int^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} d\lambda$ è convergente.

La dimostrazione contenuta nel Riemann-Weber è, come ha recentemente osservato il Pringsheim [3], fondata sopra un equivoco. Il Pringsheim

[1] Nota pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1908.

[2] Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. V. il secondo capitolo del primo volume.

[3] In un articolo sull'integrale di Fourier, inserito nei Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung (B. XVII, 1907), il Pringsheim osserva che il Weber scrive abusivamente la formula

$$\int_0^\mu d\alpha \int_c^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \lambda\mu \, d\lambda \,,$$

dalla quale poi si deduce la (1). Questi punti poco chiari del Riemann-Weber costituiscono una rarissima singolarità nella limpida eleganza dell'ottimo libro.

afferma che, ciò nonostante, il teorema è valido, e che anzi bastano le sole condizioni I e II, fra le tre che qui abbiamo scritte, perchè si possa rigorosamente stabilirlo. Aspettando che l'illustre Autore abbia reso nota la sua dimostrazione, noi non crediamo, intanto, inutile darne una, rigorosa e semplice.

Poniamo

$$f(\alpha) = \int_c^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda \,,$$

e vediamo di provare che $f(\alpha)$ è, per ogni $\alpha > 0$, una funzione continua di α. Che, intanto, per ogni $\alpha > 0$, l'integrale converga, si deduce agevolmente dal § 7 del primo volume del Riemann-Weber.

Se ora γ e ν sono due numeri positivi non inferiori a c, il secondo teorema della media ci permette di scrivere

$$(2) \qquad \int_\gamma^\nu \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = \psi(\gamma) \frac{\sin \alpha\xi - \sin \alpha\gamma}{\alpha} + \psi(\nu) \frac{\sin \alpha\nu - \sin \alpha\xi}{\alpha}$$

dove ξ è un numero intermedio fra γ e ν. La convergenza dell'integrale $f(\alpha)$ assicura che il secondo membro ha, per ν infinito, un limite ben preciso. Ma $\psi(\nu)$ tende a zero, il suo coefficiente non supera $\frac{2}{\alpha}$, come il coefficiente di $\psi(\gamma)$, dunque possiamo scrivere la formula

$$\left| \int_\gamma^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda \right| \leq \frac{2\psi(\gamma)}{\alpha} \,.$$

Per γ abbastanza grande, il secondo membro è una quantità arbitrariamente piccola. Se facciamo variare α, in modo che, nel variare, non diventi più piccolo di un numero positivo fisso ε, allora l'oscillazione di quest'integrale si può considerare arbitrariamente piccola, per γ abbastanza grande.

Fissato ad arbitrio un numero positivo ω, piccolo quanto si voglia, esisterà dunque un numero *fisso* γ tale che l'oscillazione di quest'integrale non passi $\frac{\omega}{2}$.

Ma, se facciamo variare α abbastanza poco, anche l'integrale

$$\int_c^\gamma \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda$$

oscillerà meno di $\frac{\omega}{2}$. Infatti si può scrivere

$$\left| \int_c^\gamma \psi(\lambda) \left[\cos (\alpha + h) \lambda - \cos \alpha\lambda\right] d\lambda \right| = 2 \left| \int_c^\gamma \psi(\lambda) \sin \frac{h\lambda}{2} \sin \left(\alpha + \frac{h}{2}\right) \lambda \, d\lambda \right| .$$

Ora, il modulo di $\sin\left(\alpha + \frac{h}{2}\right)\lambda$ non oltrepassa 1, il modulo di $\sin\frac{h\lambda}{2}$ non oltrepassa $\frac{h\lambda}{2}$, dunque l'oscillazione dell'integrale che stiamo esaminando non oltrepassa $|h|\int_c^\gamma \lambda\psi(\lambda)\,d\lambda$, e, come tale, si può, per h abbastanza vicino a zero, ridurre $< \frac{\omega}{2}$.

Ricomponendo $f(\alpha)$ come segue:

$$f(\alpha) = \int_c^\gamma \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda + \int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda\,,$$

noi vediamo che, se $\alpha > 0$ varia abbastanza poco, la funzione $f(\alpha)$ oscilla meno di ω; ciò significa che $f(\alpha)$ è una funzione continua di α per ogni $\alpha > 0$.

Notiamo che dalla (2) si ricava

$$(3)\qquad \int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda = \psi(\gamma)\,\frac{\sin\alpha\varrho - \sin\alpha\gamma}{\alpha}$$

dove ϱ è una funzione di α, sulla quale non possiamo dire nulla di preciso; ma invece $\sin\alpha\varrho$ è una funzione continua di ogni $\alpha > 0$, la quale non esce mai dall'intervallo $(-1, 1)$.

La formula (3) è valida per ogni $\gamma \geqq c$; col variare di γ, varia generalmente anche $\sin\alpha\varrho$, ma sempre fra -1 e 1; e il coefficiente di $\psi(\gamma)$ non supera $\frac{2}{\alpha}$.

La funzione $f(\alpha)$, essendo continua, è integrabile in ogni intervallo (ε, μ), limitato da due arbitrarî numeri positivi ε, μ.

Supponendo dunque che $\varepsilon < 1$ e $\mu > \varepsilon$ siano due numeri positivi fissi, noi possiamo scrivere

$$(4)\qquad \int_\varepsilon^\mu d\alpha \int_c^\nu \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda = \int_c^\nu \psi(\lambda)\,d\lambda \int_\varepsilon^\mu \cos\alpha\lambda\,d\alpha$$

$$= \int_c^\nu \psi(\lambda)\,\frac{\sin\mu\lambda - \sin\varepsilon\lambda}{\lambda}\,d\lambda\,.$$

Ma la convergenza dell'integrale $f(\alpha)$ mostra che, fissato ad arbitrio un numero positivo ω, quanto si voglia piccolo, si può, per ν abbastanza alto, porre

$$\left|\int_\nu^\infty \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda\right| < \frac{\omega}{\mu - \varepsilon}\,.$$

Si deduce che il primo membro di (4) ha un limite ben preciso per ν infinito, e si può scrivere

$$(5) \qquad \int_0^\mu d\alpha \int_c^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = \int_c^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \mu\lambda \, d\lambda - \\ - \int_c^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda .$$

Ora noi applichiamo alle due funzioni $\frac{\psi(\lambda)}{\lambda}$ e $\sin \mu\lambda$ una formula come la (3), la quale è invece relativa alle due funzioni $\psi(\lambda)$ e $\cos \lambda$. Otteniamo

$$\left| \int_c^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \mu\lambda \, d\lambda \right| \leq \frac{2\psi(c)}{\mu c}$$

o anche

$$(6) \qquad \lim_{\mu=\infty} \int_c^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \mu\lambda \, d\lambda = 0 .$$

Esaminiamo poi l'altro integrale che figura nel secondo membro della (5). Esso si può decomporre come segue:

$$(7) \qquad \int_c^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda = \int_c^\gamma \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda \\ + \int_\gamma^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda .$$

Ora, qualunque siano i due numeri positivi l ed L, e comunque L cresca, l'integrale $\int_l^L \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda$ resta sempre entro limiti fissi. Tenendo presente ciò, noi possiamo nel secondo integrale del secondo membro di (7) operare la sostituzione $\lambda' = \varepsilon\lambda$, dove λ' è la nuova variabile d'integrazione. Sopprimendo l'accento, otteniamo

$$\int_{\gamma\varepsilon}^\infty \psi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda .$$

Ma, scrivendo

$$\int_{\gamma\varepsilon}^\nu \psi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda = \psi(\gamma) \int_{\gamma\varepsilon}^\xi \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda + \psi\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right) \int_\xi^\nu \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda ,$$

dove ξ è un numero fra $\gamma\varepsilon$ e $\nu > \gamma$, noi vediamo che si può *fissare* γ così alto, che, qualunque sia $\varepsilon < 1$, e qualunque sia $\nu > \gamma$, quest'espressione diventi vicina a zero più del numero arbitrario fisso $\frac{\omega}{2}$. Fissato in tal modo

γ, basterà ora assumere ε abbastanza piccolo perchè anche la funzione di ε

$$\int_c^\gamma \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda$$

risulti vicina a zero più di $\frac{\omega}{2}$.

Con ciò, il primo membro di (7) risulterà vicino a zero più di ω; dunque possiamo dire che esso tende a zero per $\varepsilon = 0$. Ma la (6) già indica che anche il primo integrale del secondo membro di (5) tende a zero per μ infinito; dunque risulta senz'altro dimostrata la (1), che volevamo stabilire.

Come si vede, non abbiamo adoperato la condizione III relativa alla funzione $\psi(\lambda)$, ma soltanto la I e la II. La I si potrebbe alquanto ampliare, ma ciò complicherebbe la dimostrazione. Comunque sia, la condizione III è superflua, come aveva già asserito il Pringsheim.

Matematica. — *Sui criterii d'integrabilità finita di una equazione di Riccati.* Nota del dott. Carmine Ajello, presentata dal Corrispondente E. Pascal.

Ultimamente il prof. Pascal, in due Note [1], ha considerato i casi di integrabilità finita di una equazione di Riccati del tipo

$$y' + y^2 = S \tag{1}$$

con $S = Ax^{2\lambda-2} + Bx^{\lambda-2} + Cx^{-2}$, già considerata da Eulero, e comprendente i casi considerati da Malmstèn, da Brioschi e da Siacci.

Ora io mi propogo in questa Nota di studiare i casi d'integrabilità della equazione del medesimo tipo, dove però S abbia la forma più generale

$$S = a_0 x^{m\lambda-2} + a_1 x^{(m-1)\lambda-2} + \cdots + a_{m-1} x^{\lambda-2} + a_m x^{-2}.$$

In questa ricerca mi avvalgo dei risultati ottenuti dal Liouville nella sua *Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites* e nelle sue *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati* [2], e poi dal Genocchi nei suoi *Studi intorno ai casi di integrazione finita* [3].

Con la solita nota trasformazione la (1) si riduce alla equazione di 2° ordine

$$z'' = Sz, \tag{2}$$

e poi con l'altra trasformazione

$$x = t^{\frac{1}{\lambda}} \quad , \quad z = vt^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}},$$

[1] Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli, 1903 e 1908.

[2] Journal de Mathématiques, 1er sér., t. IV, VI,

[3] Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, tomi XXIII e XXVIII.