ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

γ, basterà ora assumere ε abbastanza piccolo perchè anche la funzione di ε

$$\int_c^\gamma \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda$$

risulti vicina a zero più di $\frac{\omega}{2}$.

Con ciò, il primo membro di (7) risulterà vicino a zero più di ω; dunque possiamo dire che esso tende a zero per $\varepsilon = 0$. Ma la (6) già indica che anche il primo integrale del secondo membro di (5) tende a zero per μ infinito; dunque risulta senz'altro dimostrata la (1), che volevamo stabilire.

Come si vede, non abbiamo adoperato la condizione III relativa alla funzione $\psi(\lambda)$, ma soltanto la I e la II. La I si potrebbe alquanto ampliare, ma ciò complicherebbe la dimostrazione. Comunque sia, la condizione III è superflua, come aveva già asserito il Pringsheim.

Matematica. — *Sui criterii d'integrabilità finita di una equazione di Riccati.* Nota del dott. Carmine Ajello, presentata dal Corrispondente E. Pascal.

Ultimamente il prof. Pascal, in due Note [1], ha considerato i casi di integrabilità finita di una equazione di Riccati del tipo

$$y' + y^2 = S \tag{1}$$

con $S = Ax^{2\lambda-2} + Bx^{\lambda-2} + Cx^{-2}$, già considerata da Eulero, e comprendente i casi considerati da Malmstèn, da Brioschi e da Siacci.

Ora io mi propogo in questa Nota di studiare i casi d'integrabilità della equazione del medesimo tipo, dove però S abbia la forma più generale

$$S = a_0 x^{m\lambda-2} + a_1 x^{(m-1)\lambda-2} + \cdots + a_{m-1} x^{\lambda-2} + a_m x^{-2}.$$

In questa ricerca mi avvalgo dei risultati ottenuti dal Liouville nella sua *Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites* e nelle sue *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati* [2], e poi dal Genocchi nei suoi *Studi intorno ai casi di integrazione finita* [3].

Con la solita nota trasformazione la (1) si riduce alla equazione di 2° ordine

$$z'' = Sz, \tag{2}$$

e poi con l'altra trasformazione

$$x = t^{\frac{1}{\lambda}} \quad , \quad z = vt^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}},$$

(1) Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli, 1903 e 1908.

(2) Journal de Mathématiques, 1er sér., t. IV, VI,

(3) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, tomi XXIII e XXVIII.

abbiamo la

$$(3) \qquad v'' = \left[M_1 t^{m-2} + M_2 t^{m-3} + \cdots + M_{m-2} t + A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} \right] v,$$

dove

$$C = \frac{4a_m + 1 - \lambda^2}{4\lambda^2},$$

e tutti gli altri coefficienti sono rispettivamente quelli della (2) divisi per λ^2, e propriamente

$$M_1 = \frac{a_0}{\lambda^2}, \; M_2 = \frac{a_1}{\lambda^2}, \; \ldots, \; A = \frac{a_{m-2}}{\lambda^2}, \; B = \frac{a_{m-1}}{\lambda^2}.$$

Dal numero 7 della prima Memoria del Genocchi, si deduce che se C non è della forma $\beta(\beta+1)$, essendo β un numero commensurabile e positivo, la (3) non ammette integrale algebrico. E siccome è

$$C = \frac{4a_m + 1 - \lambda^2}{4\lambda^2},$$

ponendo

$$l = \sqrt{1 + 4a_m},$$

si avrà che dovrà essere commensurabile la frazione $\frac{l}{\lambda}$, ed almeno una delle due quantità $1 + \frac{l}{\lambda}$, $1 - \frac{l}{\lambda}$ dovrà essere positiva.

Se poi C od $\frac{l}{\lambda}$ non soddisfano a queste condizioni, ed è certo perciò che non esiste integrale algebrico per la (3), dobbiamo, seguendo il criterio del Liouville, ricercare se la equazione

$$(4) \qquad \frac{du}{dt} + u^2 = \left[M_1 t^{m-2} + M_2 t^{m-3} + \cdots + A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} \right],$$

che si ottiene ponendo nella (3)

$$v = e^{\int u dt},$$

ammetta o pur no integrali razionali.

Ora, con un ragionamento analogo a quello adoperato dal Liouville e poi dal Genocchi nelle citate Memorie e per casi simili, si riconosce che se la (4) ammette un integrale razionale, esso non potrà avere altra forma che

$$(5) \qquad u = \pm Q + \frac{k}{t} + h \left[\frac{1}{t-a_1} + \frac{1}{t-a_2} + \cdots + \frac{1}{t-a_i} \right],$$

h potendo essere solo zero od uno, k essendo radice della $k(k-1)=\mathrm{C}$, e Q essendo la parte intera della radice quadrata di

$$\mathrm{M}_1\, t^{m-2}+\mathrm{M}_2\, t^{m-3}+\cdots+\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{t}+\frac{\mathrm{C}}{t^2}$$

ordinata secondo le potenze decrescenti di t.

Se m è dispari, Q non potrà essere mai razionale, e quindi ricaviamo da ciò il primo risultato che: *la* (2) *non è mai integrabile con un numero finito di segni algebrici, esponenziali e logaritmici quando m è dispari e maggiore di* 1.

Considieriamo ora il caso di m pari; ponendo

$$m=2\varrho$$

$$\mathrm{Q}=\mathrm{A}_0\, t^{\varrho-1}+\mathrm{A}_1\, t^{\varrho-2}+\cdots+\mathrm{A}_{\varrho-2}\, t+\mathrm{A}_{\varrho-1}\,,$$

$$\mathrm{Q}^2-[\mathrm{M}_1\, t^{2\varrho-2}+\mathrm{M}_2\, t^{2\varrho-3}+\cdots+\mathrm{M}_{2\varrho-2}\, t+\mathrm{A}]=$$
$$=\mathrm{P}_0\, t^{\varrho-2}+\mathrm{P}_1\, t^{\varrho-3}+\cdots+\mathrm{P}_{\varrho-3}\, t+\mathrm{P}_{\varrho-2}\,;$$

e tenendo conto della (5), la (4) si trasforma in

$$\mathrm{P}_0\, t^{\varrho-2}+\mathrm{P}_1\, t^{\varrho-3}+\cdots+\mathrm{P}_{\varrho-2}-\frac{\mathrm{B}}{t}\pm\frac{d\mathrm{Q}}{dt}\pm 2\mathrm{Q}\,\frac{k}{t}\pm$$

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\pm 2\mathrm{Q}h\left[\frac{1}{t-a_1}+\frac{1}{t-a_2}+\cdots+\frac{1}{t-a_i}\right]+\\ &+\frac{2kh}{t}\left[\frac{1}{t-a_1}+\frac{1}{t-a_2}+\cdots+\frac{1}{t-a_i}\right]+\\ &+\frac{2h^2}{t-a_1}\left[\frac{1}{t-a_2}+\frac{1}{t-a_3}+\cdots+\frac{1}{t-a_i}\right]+\cdots=0.\end{aligned}$$

Ed eguagliando a zero prima di tutto il coefficiente della potenza più elevata di t, abbiamo la duplice condizione

$$\pm\mathrm{P}_0-(\varrho-1)\,\mathrm{A}_0-2k\mathrm{A}_0-2i\mathrm{A}_0=0\,,$$

dove i indica il numero delle $a_1\,, a_2\,,\ldots, a_i$.

Se ne deduce che deve essere

$$(7)\qquad \pm\frac{\mathrm{P}_0}{2\mathrm{A}_0}-\frac{2k+\varrho-1}{2}=i$$

con i intero nullo o positivo.

Se una di queste condizioni si avvera, la (3) può essere soddisfatta da un valore

$$(8)\qquad v=e^{\pm\int \mathrm{Q}dt}\,.\,t^k\,.\,\mathrm{Z}^h,$$

prendendo dei due segni quello che deve prendersi per P_0 nella (7), ed essendo

$$Z = (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_i)$$

un polinomio di grado i, ed i precisamente quel numero intero nullo o positivo trovato sopra.

Eguagliando a zero gli altri coefficienti della (6) si otterrebbero, oltre le (7), altre $i + \varrho - 1$ equazioni, tenendo conto di un sol segno, mentre le a da determinare sono i. Si hanno dunque $\varrho - 1$ condizioni per la esistenza di un integrale particolare e $2(\varrho - 1)$ per quella dell' integrale generale della (2) in forma finita esplicita; bene inteso, oltre le (7).

Ma noi preferiamo di sostituire nella (3) il valore di v dato dalla (8), dopo di aver posto

$$Z = t^i + h_1 t^{i-1} + h_2 t^{i-2} + \cdots + h_{i-1} t + h_i, \qquad (\text{supposto } h = 1).$$

Così facendo, si ottiene il sistema:

$$(9) \begin{cases} (\alpha) \begin{cases} (\pm 2k A_{\varrho-1} - B) h_i \pm 2k h_{i-1} = 0 \\ [P_{\varrho-2} \pm (2k+1) A_{\varrho-2}] h_i + [\pm (2k+2) A_{\varrho-1} - B] h_{i-1} + \\ \qquad\qquad + 2(1 \pm 2k) h_{i-2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [P_{\varrho-i} \pm (2k+i-1) A_{\varrho-i}] h_i + \\ \qquad + [P_{\varrho-(i-1)} \pm (2k+i) A_{\varrho-(i-1)}] h_{i-1} + \cdots \\ \qquad \cdots + [P_{\varrho-2} \pm (2k + 2(i-2) + 1) A_{\varrho-2}] h_2 + \\ \quad + [\pm 2k A_{\varrho-1} - B \pm 2(i-1) A_{\varrho-1}] h_1 = -[\pm 2k + i - 1] i \end{cases} \\ (\beta) \begin{cases} P_1 \pm (2k + \varrho - 2) A_1 \pm 2i A_1 + \\ \qquad + [P_0 \pm (2k + \varrho - 1) A_0 \pm 2(i-1) A_0] h_1 = 0 \\ P_2 \pm (2k + \varrho - 3) A_2 \pm 2i A_2 + \\ \qquad + [P_1 \pm (2k + \varrho - 2) A_1 \pm 2(i-1) A_1] h_1 + \\ \qquad + [P_0 \pm (2k + \varrho - 1) A_0 \pm 2(i-2) A_0] h_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \pm 2i A_{\varrho-1} - B \pm 2k A_{\varrho-1} + \\ \qquad + [P_{\varrho-2} \pm (2k+1) A_{\varrho-2} \pm 2(i-1) A_{\varrho-2}] h_1 + \cdots = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Prendendo una volta i segni superiori, un'altra volta quelli inferiori, secondo che delle (7) si avvera quella col segno $+$ o quella col segno $-$ per P_0, si ottiene un sistema nel quale le (α), che sono i, servono a determinare le h e quindi la Z, e le (β) forniscono le $\varrho - 1$ condizioni che insieme alla (7), si debbono avverare per l'esistenza di un integrale particolare. Se si avverano entrambe le (7), è chiaro che si hanno dalle (9) due sistemi corrispondenti (α) e (β) ed (α') e (β'), quindi $2(\varrho-1)$ condizioni, oltre le due (7), per l'esistenza dell'integrale generale. Può dirsi più brevemente che le condizioni per la integrabilità sono le stesse che occorrono per la compatibilità di ognuno dei due sistemi (α), (β) ed (α'), (β') nelle incognite h. Se la compatibilità sussiste per uno solo di essi, si ha un integrale particolare; se per tutti e due, separatamente considerati, se ne hanno due e quindi l'integrale generale.

Fermiamoci ora a considerare un poco più profondamente le (7), ed osserviamo anzitutto che la somma dei loro primi membri è eguale ad

$$(10) \qquad 1-\varrho-2k.$$

Ciò posto è evidente che se $C \leq 0$, non potendo essere $k<0$, quella somma sarà certamente negativa, e perciò in quel caso le (7) non potranno coesistere, ossia: *la* (2) *non potrà ammettere integrale generale finito se* $C \leq 0$.

Ma se $C>0$, esiste un valore negativo di k, e se questo è tale da rendere positiva o nulla quella somma, allora è possibile la esistenza dello integrale generale finito nel senso sopra detto.

Per avverarsi ciò dev'essere

$$C \geq \frac{\varrho^2-1}{4};$$

ma per l'esistenza dell'integrale generale, quella somma espressa dalla (10) deve essere anche intera: dunque

$$2k = 1-\sqrt{1+4C}$$

dev'essere intero, e perciò deve aversi

$$\sqrt{1+4C}=n \quad (n \text{ intero positivo})$$

ossia

$$C=\frac{n^2-1}{4}, \quad \text{con} \quad n \geq \varrho.$$

Ora, ricordando che

$$C=\frac{4a_m+1-\lambda^2}{4\lambda^2},$$

e ponendo $l=\sqrt{1+4a_m}$, si ricava

$$(11) \qquad \frac{l}{\lambda}=\pm n, \quad \text{con} \quad n \geq \varrho.$$

In conclusione la (11) è condizione necessaria per la esistenza dello integrale generale della (2) in forma finita esplicita. Se essa non si verifica, allora è possibile che si verifichi una sola delle (7), ossia che esista un solo integrale particolare della (2) di tal forma, ed in questo caso si può dire che l'integrale generale è ancora esprimibile sotto forma finita se ai segni algebrici, esponenziali e logaritmici si aggiunge anche il segno di integrale indefinito.

Facciamo ora qualche applicazione.

Si debba integrare la equazione:

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad y'' - \Big[\lambda^2 x^{4\lambda-2} + \lambda^2 \sqrt{2}\, x^{3\lambda-2} + \frac{3\lambda^2}{2} x^{2\lambda-2} + \\
+ \lambda^2 \sqrt{2}\, x^{\lambda-2} + \frac{9\lambda^2 - 1}{4} x^{-2} \Big] y = 0 .
\end{aligned}
$$

Qui si ha

$$\frac{l}{\lambda} = 3$$

e $3 > \varrho$, essendo $\varrho = 2$.

Per la determinazione delle A è facile vedere che si hanno le seguenti equazioni:

$$\frac{a_{s-1}}{\lambda^2} = \mathrm{M}_s = \sum_{r=0}^{s-1} \mathrm{A}_r \mathrm{A}_{s-(r+1)} , \quad (s = 1, 2, 3, \dots, \varrho) ;$$

e per la determinazione di P_0 si ha la formola

$$\mathrm{P}_0 = \sum_{r=1}^{\varrho-1} \mathrm{A}_r \mathrm{A}_{\varrho-r} - \mathrm{M}_{\varrho+1} .$$

Nel caso della (12) si ha

$$\mathrm{A}_0 = 1 , \ \mathrm{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} , \ \mathrm{Q} = x + \frac{1}{\sqrt{2}} , \ 2k = -2 , \ \mathrm{P}_0 = \mathrm{A}_1^2 - \mathrm{A} = -1$$

e per i si hanno i due valori uno e zero.

Dalle (9) relative al caso attuale si ricava

$$h_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

e perciò l'integrale generale della equazione proposta è

$$y = \mathrm{C}_1 e^{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x} \cdot x^{-1} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \mathrm{C}_2 e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x} \cdot x^{-1} .$$

Vediamo, terminando, come dalle cose su esposte si possano dedurre le condizioni per la integrabilità pel caso di $m = 2$, già considerato dal prof. Pascal [1].

[1] Vedi Note citate.

Per $m = 2$ deve aversi

$$\frac{l}{\lambda} = \pm n \quad (n \text{ intero} > 1).$$

Poi si ha

$$P_0 = B = \frac{a\lambda}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda} \quad \text{ed} \quad A_0 = \frac{1}{\lambda},$$

cosicchè le (7) in questo caso, notando che

$$k = \frac{\lambda \pm l}{2\lambda},$$

diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(a-1)\,\lambda \pm l}{2\lambda} = \text{intero nullo o positivo} \\[2ex] \dfrac{-(a+1)\,\lambda \pm l}{2\lambda} = \quad " \qquad " \qquad " \end{array} \right.$$

Sono queste le condizioni trovate dal prof. Pascal come *sufficienti*; ma ora, in conseguenza dei risultati di questa Nota, resta assodato che esse sono anche *necessarie*.

Chimica — *Sui composti del piombo con l'acido nitroso* (¹).

Nota di ALBERTO CHILESOTTI, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

5. *Scomposizione idrolitica del sale* $Pb(OH)_2\,Pb(NO_2)_2 \,.\, H_2O$. — Come si disse in una precedente Comunicazione, la regola delle fasi permette di stabilire se e quali tra i prodotti della scomposizione idrolitica di un sale si devono considerare come individui chimici. Il Cox (²) per es. ha utilizzato con successo questo principio per determinare quali sali basici di mercurio siano composti chimici definiti. Qualche cosa di simile parve si potesse tentare anche per i nitriti basici di piombo. Il principio del metodo si può spiegare come segue.

Si abbia un sale $M^{\cdot\cdot} A_2$ che per idrolisi dia origine ad un sale basico secondo l'equazione schematica: $n M^{\cdot\cdot} A_2 + m H_2O = m AH + M^{\cdot\cdot}_n A_{2n-m} OH_m$. Se si tratta con acqua una quantità tale di $M^{\cdot\cdot} A_2$ da avere ad una data temperatura e pressione un eccesso del sale $M^{\cdot\cdot} A_2$ indisciolto insieme ad una certa quantità del sale basico formato (generalmente meno solubile) e supposto raggiunto l'equilibrio, si avrà un sistema monovariante. Infatti il sistema è formato di tre componenti AH, $M(OH)_2$ e H_2O, di due fasi solide

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del R. Politecnico di Torino.
(²) Zft. f. anorg. Chem. *40* (1904), pag. 146.