# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XVII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

**Meccanica.** — *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile.* Nota del Corrispondente LEVI-CIVITA.

L'attrazione $\Phi$, esercitata da una linea materiale sopra un punto esterno P, tende notoriamente a diventare infinita quando P si avvicina indefinitamente alla linea. In una Nota recente [1] ho assegnata la espressione asintotica di una tale attrazione, sceverando (nelle derivate del corrispondente potenziale, e quindi nel vettore da esse definito) la parte singolare $\Phi^{(a)}$. Questa dipende soltanto dal comportamento *locale* della linea materiale, nell'intorno di quella posizione, cui si suppone vada indefinitamente avvicinandosi il punto P.

Dacchè la proprietà caratteristica di $\Phi^{(a)}$ è che la differenza

$$\Phi - \Phi^{(a)} = \Psi$$

rimanga finita (mentre $\Phi^{(a)}$ stesso si trova affetto da singolarità), è evidente che, per P abbastanza vicino alla linea, l'addendo $\Phi^{(a)}$ prepondera su $\Psi$; quest'ultimo può quindi essere trascurato di fronte a $\Phi^{(a)}$ con approssimazione tanto maggiore, quanto più è prossimo il punto potenziato alla linea potenziante.

Scopo del presente lavoro è di passare dal caso ipotetico di una linea al caso concreto di un tubo (pieno) T, di sezione abbastanza piccola, rispetto alla lunghezza, da essere, quanto all'andamento generale, assimilabile ad una semplice linea. Anche quanto all'attrazione, un tale tubo non differirà sensibilmente da una linea materiale, finchè si tratterà di punti posti *a debita distanza.* Ma, per punti situati in prossimità o addirittura nell'interno del tubo stesso, non sono più trascurabili le dimensioni trasversali rispetto alle distanze degli elementi potenzianti dal punto potenziato, nè è quindi in alcun modo giustificata la identificazione suddetta.

Si riconosce anzi a prima vista una differenza profonda fra i due casi. Per la linea, l'attrazione diviene infinita; per il tubo (comunque lo si supponga sottile), tutto resta finito. Non c'è dunque da aspettarsi in questo secondo caso una espressione asintotica, desunta da una semplice separazione delle singolarità. Tuttavia, se si immagina decomposto il tubo in fibrille elementari, e si osserva che ciascuna di queste è effettivamente assimilabile ad una linea materiale, si può ragionare come segue:

L'ipotesi che il punto potenziato P sia interno o prossimo al tubo (supposto il tubo abbastanza sottile), implica che sia piccola la distanza di P da

[1] Pag. 3-15 di questo stesso volume dei Rendiconti.

ogni fibrilla, così piccola in particolare perchè alla corrispondente attrazione su P sia con sufficiente approssimazione sostituibile la sua parte asintotica.

Ma allora, sommando questi contributi asintotici, si avrà una espressione dell'attrazione tanto più approssimata, quanto più è sottile il tubo; e questa espressione (al pari dei contributi, da cui risulta) godrà della proprietà fondamentale di dipendere soltanto da elementi *locali*, cioè dalle caratteristiche geometriche e materiali dell'agente in prossimità del punto P.

Ecco il risultato ultimo, cui si perviene svolgendo sistematicamente un tale ordine di idee:

Si fissi, entro il tubo T, una qualunque fra le infinite linee geometriche, atte a definire l'andamento generale del tubo: questa linea si chiamerà *mediana* o *direttrice*, e si designerà con C.

Sia P un punto generico di C; $c$ la curvatura in questo punto; $\tau$ la sezione del tubo, praticata col piano normale a C, condotto per P.

Sieno ancora O e Q due punti di $\tau$; $d\tau_0$, $d\tau$ due elementi della sezione ad essi circostanti; $\Delta = \overline{OQ}$; e si ponga

$$k = \frac{1}{\tau^2} \int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log \frac{l}{\Delta}, \tag{I}$$

dove $l$ è una costante inessenziale, che figura per ragione di omogeneità, ed è vincolata alla sola condizione qualitativa di essere abbastanza grande rispetto alla massima corda di $\tau$. (In eventuali applicazioni numeriche converrà assumere $l$ dello stesso ordine di grandezza della lunghezza del tubo).

La $k$, così definita, è, come si vede, un puro numero; essa viene a dipendere, per un dato tubo, soltanto dalla sezione normale $\tau$, cui ci si riferisce, o, ciò che è lo stesso, dal punto P. Se si immagina di fissare la posizione di P sulla direttrice C mediante l'arco $s$ di curva, contato a partire da un'origine arbitraria, la $k$ si presenta come funzione di $s$.

Ciò posto, si prenda a considerare una porzioncina di tubo di spessore $ds$, compresa fra $\tau$ e un'altra sezione normale vicinissima. Rappresentando con $\nu ds$ la quantità di materia [1], situata fra queste due sezioni, $\nu$ sarà a dirsi la densità lineare in P del nostro tubo T.

Rappresenti poi $\mathbf{F}\, ds$ (in grandezza e direzione) la risultante delle attrazioni newtoniane, che la detta porzione elementare subisce da parte di tutto il tubo; con che il vettore finito $\mathbf{F}$ si trova riferito all'unità di lunghezza.

*Dette* $F_t$, $F_n$, $F_b$ *le componenti di* $\mathbf{F}$ *secondo la tangente a* C (nel senso, in cui si contano gli archi $s$), *secondo la normale principale* (nel senso

[1] Ci riferiamo qui, per comodità di linguaggio, al caso dell'attrazione di masse materiali. Nel corso della ricerca è però trattata la densità della distribuzione come una quantità, che può anche essere negativa. Ciò coll'ovvio intendimento di rendere senz'altro applicabili i risultati anche alle azioni elettriche, alla teoria dei vortici, ecc.

della concavità) *e secondo la binormale, ove si assuma la costante dell'attrazione eguale all'unità, si ha asintoticamente*

$$\text{(II)} \qquad F_t^{(a)} = \frac{d(\nu^2 k)}{ds} , \; F_n^{(a)} = \nu^2 kc \; , \; F_b^{(a)} = 0 \; .$$

L'appellativo « asintotico » va così inteso:

Il vettore $\mathbf{F}^{(a)}$, definito dalle (II), tende a differire tanto meno (in grandezza e direzione) dalla risultante $\mathbf{F}$, quanto più è sottile il tubo. In modo più preciso: le direzioni di $\mathbf{F}$ e di $\mathbf{F}^{(a)}$ tendono a coincidere; il rapporto $\frac{F^{(a)}}{F}$ delle rispettive lunghezze tende all'unità, al decrescere indefinito della sezione del tubo.

Mostrerò prossimamente come a queste considerazioni asintotiche si colleghi una applicazione ai campi elettromagnetici puri, che già ebbi ad annunciare nella precedente mia Nota.

1. *Tubi costituiti da linee di una data congruenza.* — Sia data in una certa regione $\Gamma$ dello spazio una congruenza di linee L, cioè una famiglia $\infty^2$ di curve, tale che per ogni punto ne passi una. Sieno genericamente $u, v$ due parametri determinativi delle curve della famiglia (per es. le coordinate delle rispettive intersezioni con un piano fisso, o con un'altra superficie qualsiasi, che tagli ciascuna di esse in un sol punto); sia $w$ un terzo parametro atto a fissare la posizione dei punti sopra le curve L (per es. la lunghezza dell'arco, contata a partire dall'anzidetta superficie unisecante).

Con tali ipotesi, rimangono univocamente definite le coordinate cartesiane $x, y, z$ dei punti della regione $\Gamma$, in funzione di $u, v, w$. Scriveremo in conformità

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x = x(u, v; w), \\ y = y(u, v; w), \\ z = z(u, v; w), \end{cases}$$

e avremo in queste formule anche la rappresentazione parametrica d'una generica curva della congruenza: basterà naturalmente attribuire valori fissi ad $u, v$, facendo variare la sola $w$.

Supponiamo ulteriormente che i secondi membri delle (1) posseggano (sempre entro $\Gamma$) derivate finite dei primi quattro ordini, e che non si annulli il determinante funzionale

$$\text{(2)} \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{dw} & \frac{dy}{dw} & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix} ;$$

anzi, in modo più preciso, che sia diverso da zero il suo limite inferiore.

Queste condizioni sono più che sufficienti per assicurare la continuità e la derivabilità per due volte successive (sia rispetto ad $u$, $v$, $w$, che rispetto ad $x$, $y$, $z$) delle caratteristiche geometrico-differenziali di primo e second'ordine, spettanti alle curve della congruenza. Saranno in particolare funzioni continue e derivabili due volte i coseni direttori $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ della tangente, la curvatura $c$ e i coseni direttori $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ della normale principale.

Ciò premesso, fissiamo una determinata fra le curve L e designiamola con C, supponendo (come è evidentemente lecito senza pregiudizio della generalità) che essa corrisponda ai valori $u = 0$, $v = 0$ dei due parametri determinativi.

Consideriamo le curve L della congruenza vicine a C, e precisamente tutte quelle, che corrispondono a valori di $u$, $v$, situati in un certo intorno $\varpi$ di $u = v = 0$: esse riempiono complessivamente uno spazio filiforme, contenuto in $\Gamma$, che diremo *tubo* T, caratterizzato, quanto all'andamento generale, dalla sola linea C (come del resto da un'altra qualsiasi delle varie L, che lo costituiscono). Diremo che C è la *direttrice* del tubo, o, in particolare (se si tratta di un tubo chiuso), dell'anello T.

Quanto all'intorno $\varpi$ (da cui dipende la grossezza del tubo), converrà ritenerlo abbastanza piccolo perchè sussista costantemente una certa disuguaglianza, che sarà specificata qui appresso [n. 2, *b*)].

Interpreteremo le coppie di valori di $u$, $v$ come punti di un piano rappresentativo $\Pi$; $\varpi$ viene così a corrispondere ad una piccola area comprendente l'origine. Ogni punto di quest'area individua una curva L, e potrà dirsi *piede della curva*; il piede della direttrice C viene quindi a cadere nell'origine.

2. *Comportamento delle sezioni trasversali. Lemmi diversi.* — Le (1), risguardandovi costante $w$, ci porgono la rappresentazione parametrica di una sezione trasversale $\sigma$ del tubo; $u$, $v$ possono naturalmente interpretarsi come coordinate curvilinee di tale superficie. Il relativo quadrato dell'elemento lineare sarà

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

ove si ponga secondo la consuetudine (con evidente significato della notazione)

$$\mathrm{E} = \sum \left(\frac{dx}{du}\right)^2, \quad \mathrm{F} = \sum \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}, \quad \mathrm{G} = \sum \left(\frac{dx}{dv}\right)^2.$$

Posto pure

(3) $$\mathrm{H} = |\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}|,$$

si ha in

$$\mathrm{H}^2 = \begin{vmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{vmatrix}$$

il quadrato, fatto per righe, della matrice

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{ccc} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dz}{du} \\ \dfrac{dx}{dv} & \dfrac{dy}{dv} & \dfrac{dz}{dv} \end{array}\right|.$$

Come tale, esso ha, in tutto il campo $\Gamma$, un limite inferiore certo diverso da zero: infatti, in caso contrario, sarebbe pur zero il limite inferiore di D.

Per la stessa ragione è diverso da zero il limite inferiore del radicale

$$(5)\qquad h = \left|\sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2}\right|.$$

Introduciamo l'angolo (non ottuso) $\psi$, che la normale alla sezione $\sigma$ in un punto generico forma colla linea L passante per quel punto.

Dacchè i coseni direttori $\alpha, \beta; \gamma$ di L sono proporzionali a $\dfrac{dx}{dw}, \dfrac{dy}{dw}, \dfrac{dz}{dw}$, mentre quelli della normale a $\sigma$ sono proporzionali ai minori della matrice (4), i coefficienti di proporzionalità essendo $\pm\dfrac{1}{h}, \pm\dfrac{1}{\mathrm{H}}$ secondo il senso che si assume come positivo, si ha ovviamente

$$(6)\qquad \cos\psi = \frac{|\mathrm{D}|}{\mathrm{H}h},$$

donde apparisce che anche il limite inferiore di $\cos\psi$ è diverso da zero: ciò val quanto dire che $\psi$ non supera mai un certo angolo acuto.

A complemento di queste generalità, conviene rilevare quanto segue:

*a*) Sia $\varepsilon$ la distanza fra due punti generici $\mathrm{Q}(x, y, z)$ ed $\mathrm{O}(x_0, y_0, z_0)$ di una medesima sezione trasversale $\sigma$ ($w = \text{cost}$). Dette $u, v; u_0, v_0$ le rispettive coordinate curvilinee, poniamo

$$(7)\qquad \chi = \left|\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}\right|,$$

con che $\chi$ misura, nel piano rappresentativo $\Pi$, la distanza fra i piedi delle due curve L, passanti rispettivamente per Q e per O.

Nell'intorno $\varpi$ del detto piano rappresentativo,

$$\varepsilon^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \Sigma\,(x - x_0)^2$$

può considerarsi come funzione di $u, v$ (nonchè di $u_0, v_0$), continua assieme alle sue prime derivate.

Posto per brevità

$$\Sigma(x - x_0)\frac{d^2x}{du^2} = E_1\,,\quad \Sigma(x - x_0)\frac{d^2x}{du\,dv} = F_1\,,\quad \Sigma(x - x_0)\frac{d^2x}{dv^2} = G_1\,,$$

avremo

$$\frac{d^2\varepsilon^2}{du^2} = 2\,\Sigma\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + 2\,\Sigma(x - x_0)\frac{d^2x}{du^2} = 2(E + E_1)\,,$$

e analogamente

$$\frac{d^2\varepsilon^2}{du\,dv} = 2(F + F_1)\,,\quad \frac{d^2\varepsilon^2}{dv^2} = 2(G + G_1)\,,$$

$E_1$, $F_1$, $G_1$ convergendo manifestamente a zero, quando Q ed O tendono a coincidere.

Per $u = u_0$, $v = v_0$, $\varepsilon^2$ si annulla assieme alle sue derivate prime; applicando ad essa lo sviluppo abbreviato di Taylor (rispetto alle due variabili $u$, $v$, a partire dai valori $u_0$, $v_0$), potremo scrivere

$$\varepsilon^2 = (E + E_1)(u - u_0)^2 + 2(F + F_1)(u - u_0)(v - v_0) + \\ + (G + G_1)(v - v_0)^2\,,$$

i coefficienti riferendosi ad argomenti intermedî fra $u$ e $u_0$, $v$ e $v_0$.

Nell'intorno di ogni coincidenza della coppia Q, O ($u = u_0$, $v = v_0$), la precedente espressione di $\varepsilon^2$ costituisce una forma quadratica definita rispetto agli argomenti $u - u_0$, $v - v_0$ (in quanto i coefficienti differiscono tanto poco quanto si vuole da E, F, G, i quali appartengono ad una forma definita).

Pur definita è la forma $\chi^2$. Il rapporto $\frac{\varepsilon^2}{\chi^2}$ oscilla pertanto fra numeri finiti. Siccome d'altra parte, finchè la distanza $\varepsilon$ rimane superiore ad un certo limite fisso, lo stesso segue di $\chi$, così si può ritenere che, *per qualsiasi coppia* Q, O, $\frac{\varepsilon}{\chi}$ *resta compreso fra due costanti positive.*

*b) Ipotesi complementare; interpretazione geometrica.* — Il secondo membro della (6) dipende dalle nove derivate di $x$, $y$, $z$ rapporto ad $u$, $v$, $w$. Immaginiamo che sei di queste, e precisamente

$$\frac{dx}{du}\,,\ \frac{dy}{du}\,,\ \frac{dz}{du}\,,$$
$$\frac{dx}{dv}\,,\ \frac{dy}{dv}\,,\ \frac{dz}{dv}\,,$$

si riferiscano ad un punto Q, cioè a certi valori $u$, $v$, $w$ degli argomenti; e le rimanenti tre;

$$\frac{dx}{dw}\,,\ \frac{dy}{dw}\,,\ \frac{dz}{dw}\,,$$

ad un altro punto O della stessa sezione, cioè a valori, in generale diversi, $u_0$, $v_0$ dei primi due parametri, e allo stesso valore di $w$.

Per mettere in evidenza questa accezione, scriveremo $\dfrac{D_{QO}}{H_Q h_O}$.

Dacchè, per $u = u_0$, $v = v_0$, e in particolare per $u = u_0 = 0$, $v = v_0 = 0$, l'espressione $\dfrac{D}{Hh}$ non si annulla, e si tratta di funzione continua, potremo asserire che esiste un intorno $\varpi_1$ di $u = v = 0$, tale che, comunque si scelgano nell'intorno le coppie $u, v; u_0, v_0$, rimanga (sopra qualsiasi sezione, cioè per tutti i valori di $w$, che giova considerare) diverso da zero il limite inferiore di $\dfrac{|D_{QO}|}{H_Q h_O}$.

Ciò posto, introdurremo, accanto alle premesse del n. 1, l'ipotesi complementare seguente:

*L'intorno* $\varpi$, *che caratterizza il tubo* T, *è abbastanza piccolo da trovarsi tutto contenuto in* $\varpi_1$.

Dal punto di vista geometrico, seguitando a designare con $\cos\psi$ il rapporto $\dfrac{|D_{QO}|}{H_Q h_O}$, $\psi$ può interpretarsi come l'angolo che la normale alla sezione in Q forma colla tangente alla linea L in O. Quest'angolo $\psi$, per qualsiasi coppia di punti Q ed O, appartenenti alla stessa sezione del tubo, rimane pertanto inferiore ad un angolo fisso, minore di $\dfrac{\pi}{2}$.

Qualora si tenga presente:

1°) che le direzioni appartenenti al piano tangente (a $\sigma$ in Q) formano colla detta tangente a L in O angoli necessariamente compresi fra $\dfrac{\pi}{2} - \psi$ e $\dfrac{\pi}{2} + \psi$, talchè i relativi coseni non possono superare $\operatorname{sen}\psi$, in valore assoluto;

2°) che, se si congiungono due punti quali si vogliono di $\sigma$ con un arco tracciato sulla stessa $\sigma$, una almeno delle tangenti nei punti intermedî dell'arco è parallela alla corda determinata dagli estremi;

si è condotti alla conclusione che il coseno dell'angolo, compreso fra una generica corda di $\sigma$ e la tangente ad una curva L, spiccata da un punto, pure generico, della stessa sezione $\sigma$, non può mai superare, in valore assoluto, una certa costante, essenzialmente minore dell'unità.

*c) Funzioni semi-finite. Ordine di grandezza dei rispettivi integrali.* — Sia $f$ una funzione dei due punti Q ed O e di quanti si vogliono altri punti parametrici P, R, ecc., variabili anch'essi sopra una medesima sezione $\sigma$. Consideriamo in particolare la dipendenza di $f$ dalle coordinate $u_0$, $v_0$ del punto O, e supponiamo che (comunque varino i punti parametrici) essa possa al più diventare infinita di prim'ordine per O coincidente con

$Q(u_0 = u, v_0 = v)$, mantenendosi finita e continua per ogni altra posizione di O.

In tale ipotesi, $f$ potrà porsi sotto la forma

$$\frac{f_1}{\varepsilon},$$

essendo $f_1$ ovunque finita.

Se, collo stesso significato di $f^\star$, $f_1$ può a sua volta presentarsi sotto la forma $\overline{PR} \cdot f^\star$, con che

$$f = \frac{\overline{PR}}{\varepsilon} f^\star, \tag{8}$$

diremo che $f$ è *funzione semi-finita*.

Manifestamente le funzioni finite rientrano nella definizione come caso particolare: basta supporre $\overline{PR} = \varepsilon$.

La ragione del nome sta nella circostanza che, pur potendo $f$ diventare infinita nel punto Q, il suo integrale

$$J = \int_{\varpi} f \, du_0 \, dv_0 \tag{9}$$

verifica una disuguaglianza dello stesso tipo di quelle che valgono per ogni funzione finita.

La constatazione è immediata. Immaginiamo infatti di assumere, nel piano rappresentativo $\Pi$ delle $u_0, v_0$, un sistema di coordinate polari col polo nel punto $(u, v)$ (piede della curva L passante per Q). Il raggio vettore di questo sistema di coordinate è la $\chi$, definita dalla (7); chiamando $\vartheta$ l'anomalia, si ha, per l'elemento di campo $\varpi$,

$$d\varpi = \chi \, d\chi \, d\vartheta.$$

La precedente espressione di J, ove si assumano come variabili correnti di integrazione $\chi$ e $\vartheta$, anzichè $u_0$ e $v_0$, e si abbia riguardo alla (8), potrà essere scritta

$$J = \int_{\varpi} \overline{PR} \, f^\star \frac{\chi}{\varepsilon} \, d\chi \, d\vartheta.$$

Notiamo che, per l'osservazione $a$), il rapporto $\frac{\chi}{\varepsilon}$ oscilla entro limiti finiti, e che lo stesso può dirsi del rapporto $\frac{\overline{PR}}{\chi_1}$, designando $\chi_1$ la distanza (nel piano rappresentativo $\Pi$) fra i piedi delle due curve L, passanti rispettivamente per P e per R.

Se ne desume la possibilità di assegnare una costante positiva M tale che, per tutti i valori dei varî argomenti che interessa considerare,

$$\left|\overline{\mathrm{PR}}\, f^{*} \frac{\chi}{\varepsilon}\right| < \frac{\mathrm{M}}{2\pi}\, \chi_1 \,.$$

In base a tale disuguaglianza, chiamando $\delta$ la massima distanza di due punti del campo $\varpi$ (con che in particolare $\chi_1 < \delta$), si ha subito l'annunciata limitazione

$$|\mathrm{J}| < \frac{\mathrm{M}}{2\pi}\, \delta \int_{\varpi} d\chi\, d\vartheta < \mathrm{M}\delta^2 \,. \tag{10}$$

Converremo di dire che *una quantità* J, *per cui vale una disuguaglianza come la* (10), *è* (almeno) *di secondo ordine rispetto a* $\delta$.

*d*) Consideriamo la differenza $x - x_0$ come funzione delle coordinate curvilinee dei due punti Q ed O, cioè (coincidendo le loro terze coordinate) di $u, v, w$ ; $u_0, v_0$ ; e formiamone in particolare la derivata rispetto a $w$.

Questa derivata

$$\frac{d}{dw}(x - x_0) = \frac{dx}{dw} - \frac{dx_0}{dw}$$

si presenta come la differenza fra i valori assunti dalla funzione $\frac{dx}{dw}$ nei due punti Q ed O. Per le ipotesi ammesse circa le funzioni (1), alla $\frac{dx}{dw}$ è certamente applicabile il teorema dell'aumento finito, da cui segue che la differenza $\frac{dx}{dw} - \frac{dx_0}{dw}$ può porsi sotto la forma $\overline{\mathrm{OQ}} \,.\, f^{*} = \varepsilon \,.\, f^{*}$, designando $f^{*}$ una funzione finita e continua.

Lo stesso vale naturalmente per $y - y_0$, $z - z_0$.

Diremo in conformità che *le derivate*

$$\frac{d(x - x_0)}{dw}\,, \quad \frac{d(y - y_0)}{dw}\,, \quad \frac{d(z - z_0)}{dw}$$

*contengono* $\varepsilon$ *a fattore*.

Si osservi ora che $\varepsilon$ dipende da $w$ pel tramite delle differenze $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Ove si designino per brevità con

$$\varepsilon_1 = \frac{x - x_0}{\varepsilon}\,, \quad \varepsilon_2 = \frac{y - y_0}{\varepsilon}\,, \quad \varepsilon_3 = \frac{z - z_0}{\varepsilon}$$

i coseni direttori di OQ, si ha

$$\frac{d \log \varepsilon}{dw} = \frac{1}{\varepsilon}\left\{ \varepsilon_1 \frac{d(x - x_0)}{dw} + \varepsilon_2 \frac{d(y - y_0)}{dw} + \varepsilon_3 \frac{d(z - z_0)}{dw} \right\},$$

donde apparisce che $\frac{d \log \varepsilon}{dw}$ rimane finita, anche quando O tende a coincidere con Q.

Analoga conclusione vale per le derivate rapporto a $w$ dei coseni $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Basta pensare che una qualunque delle loro derivate rapporto ad $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ rientra nel tipo $\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon}$ con $\mathcal{E}$ polinomio di secondo grado nei coseni stessi. Una derivata rapporto a $w$ si presenta così come somma di termini della forma $\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} \frac{d(x - x_0)}{dw}$, e si conserva quindi finita.

*e*) Per le derivate rapporto ad $u$ o a $v$ (in quanto si riguardino $u_0, v_0$ come indipendenti da $u, v$), non è più vero che, in $\frac{d(x - x_0)}{du} = \frac{dx}{du}$ ed analoghe, comparisca $\varepsilon$ a fattore. Si può quindi soltanto affermare che *le derivate di*

$$\log \varepsilon \; , \; \varepsilon_1 \; , \; \varepsilon_2 \; , \; \varepsilon_3$$

*rapporto ad $u$ o a $v$ divengono infinite di prim'ordine al più per* O *coincidente con* Q.

*f*) Indichiamo con

$$g_1(\mathrm{P}\, ; x, y, z\, ; x_0, y_0, z_0\, ; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

una funzione, che dipenda da $x, y, z\, ; x_0, y_0, z_0$ direttamente e pel tramite degli argomenti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, e dipenda inoltre dalle coordinate $x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}}$ di un punto parametrico P, che supporremo situato sulla stessa sezione $\sigma$, cui appartengono Q ed O.

Sia $g_1$ finita, assieme alle sue derivate prime e seconde, rapporto a tutti i 12 argomenti. Da ciò e dal lemma *d*) discende subito che anche $\frac{dg_1}{dw}$ si mantiene finita.

In generale non si può dire altrettanto per $\frac{dg_1}{du}$ e $\frac{dg_1}{dv}$. Si può però porre una qualunque delle tre derivate, che designeremo genericamente con $\mathfrak{D} g_1$, sotto la forma

$$\mathfrak{D} g_1 = \frac{g^*}{\varepsilon},$$

dove $g^*$ è ancora finita e dotata di derivate finite, rispetto alle coordinate $x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}}$ del punto parametrico.

Per rendersene conto, date le ipotesi fatte sulla dipendenza di $g_1$ dai suoi 12 argomenti espliciti

$$x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}}\; ; \; x, y, z \; ; \; x_0, y_0, z_0 \; ; \; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3,$$

basterà accertare che si presenta sotto la forma $\frac{g^\star}{\varepsilon}$ la derivata $\mathfrak{D}$ di ciascuno dei detti argomenti.

Per i primi 9, la cosa risulta senz'altro dal fatto che le derivate di $x, y, z$ rapporto ad $u, v, w$ possono considerarsi (in base alle (1) e alle ipotesi fatte a loro riguardo) come altrettante funzioni finite, derivabili, ecc. delle coordinate $x, y, z$ del punto di cui si tratta: moltiplicando e dividendo per $\varepsilon$, si attribuisce loro la forma $\frac{g^\star}{\varepsilon}$ coll'accennato comportamento di $g^\star$.

Quanto ai coseni $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, s'è già osservato che una qualunque delle loro derivate rapporto ad $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ rientra nel tipo $\frac{\mathfrak{E}}{\varepsilon}$, con $\mathfrak{E}$ polinomio di secondo grado nei coseni stessi. Sarà così ogni $\mathfrak{D}\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$ somma di termini del tipo $\frac{\mathfrak{E}}{\varepsilon}\mathfrak{D}(x - x_0)$. Come si vede il numeratore è finito (e nemmeno dipende dalle coordinate $x_P, y_P, z_P$ del punto parametrico); in ogni modo anche $\mathfrak{D}\varepsilon_i$ rientra nel tipo $\frac{g^\star}{\varepsilon}$.

In modo analogo si riconosce che, se

$$g_2(P; x, y, z; x_0, y_0, z_0)$$

designa una funzione, la quale si comporta esattamente come $g_1$, salvo che non dipende dalle $\varepsilon$, e se si indica con $l$ una costante, anche le derivate del prodotto

$$g_2 \log \frac{\varepsilon}{l}$$

sono riducibili alla forma

$$\frac{g^\star}{\varepsilon}.$$

Se dunque si mette in particolare evidenza la dipendenza dal punto parametrico P e si pone

$$g(P) = g_1(P) + g_2(P) \log \frac{\varepsilon}{l},$$

si potrà ritenere

$$\mathfrak{D}g(P) = \frac{\overline{g}(P)}{\varepsilon}$$

con $\overline{g}$ funzione ben determinata del tipo $g^\star$, cioè finita e dotata di derivate finite rapporto ad $x_P, y_P, z_P$.

Attribuendo al punto parametrico P un'altra qualsiasi posizione R (della stessa sezione $\sigma$), avremo analogamente

$$\mathfrak{D}g(R) = \frac{\overline{g}(R)}{\varepsilon},$$

donde per sottrazione

$$\mathfrak{D}\{g(\mathrm{P}) - g(\mathrm{R})\} = \frac{\overline{g}(\mathrm{P}) - \overline{g}(\mathrm{R})}{\varepsilon}.$$

Se ne desume, invocando il teorema dell'aumento finito, e avendo riguardo a $c$), [1] che *le derivate d'ogni differenza del tipo* $g(\mathrm{P}) - g(\mathrm{R})$ *sono funzioni semi-finite.*

$g$) Supponiamo che $g_1, g_2$, e quindi anche $g$, dipendano più generalmente da più, diciamo due, per fissar le idee, punti parametrici P e P', valendo beninteso rispetto ad entrambi e rispetto alle altre variabili il comportamento di cui sopra.

Scriveremo in tal caso $g(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$.

Ove sieno R ed R' due posizioni qualisivogliano (sempre sulla stessa sezione $\sigma$) dei punti P e P', si può qui ancora agevolmente concludere che *le derivate* (rapporto ad $u, v, w$) *d'ogni differenza del tipo* $g(\mathrm{P}, \mathrm{P}') - g(\mathrm{R}, \mathrm{R}')$ *sono funzioni semi-finite.*

3. *Potenziale newtoniano di un tubo.* — Sia $\varrho(x, y, z)$ una funzione dei punti del tubo T, finita, continua e derivabile almeno tre volte.

Siano Q e Q' due punti generici di T; $x, y, z$ e $x', y', z'$ le rispettive coordinate cartesiane; $u, v, w$ e $u', v', w'$ le coordinate curvilinee [definite, possiam dire, dalla risoluzione delle corrispondenti (1)]; $\overline{\mathrm{QQ}'} = r$, $\varrho' = \varrho(x', y', z')$, $d\mathrm{T}' = dx'\,dy'\,dz'$, e si ponga

$$\mathrm{U} = \int_{\mathrm{T}} \frac{\varrho'}{r}\, d\mathrm{T}', \tag{11}$$

con che U è il potenziale in Q di una massa distribuita con densità $\varrho$ entro il tubo T.

Per eseguire l'integrazione, si può immaginare scisso il tubo T (di sezione piccola, ma pur sempre finita) in tubetti infinitesimi, costituiti anch'essi, al pari di T, da linee L, e valutare prima il contributo di un tubetto generico, sommando poi questi contributi parziali.

Ove si adottino come variabili correnti di integrazione, in luogo delle $x', y', z'$, le $u', v', w'$, l'accennato criterio equivale ad eseguire una prima integrazione rispetto a $w'$, lasciando fissi $u', v'$, e ad integrare poi rispetto a questi due parametri, facendoli variare entro il campo di valori corrispondente a T, cioè (nel piano rappresentativo $\Pi$) entro $\varpi$.

Potremo pertanto scrivere, in base alla formula di trasformazione degli integrali tripli,

$$\mathrm{U} = \int_{\varpi} du'\,dv' \int_{\mathrm{L}'} \frac{|\mathrm{D}'|\varrho'}{r}\, dw',$$

[1] Si noti che è lecito invocare la proposizione $c$), perchè, come abbiamo esplicitamente avvertito, i punti parametrici P, R si ritengono situati sulla stessa sezione $w = \mathrm{cost}$, cui appartengono Q ed O.

dove D′ è il valore di D in Q′, e l'integrazione rispetto a $w$ va estesa (nel senso delle $w$ crescenti) a quel tratto L′ della curva L, passante per Q′, che appartiene al tubo T.

L'elemento d'arco $dL'$ del tratto L′ è dato, a norma delle (1) e (5), da

$$dL' = h' dw',$$

rappresentando manifestamente $h'$ il valore di $h$ in Q′.

Posto per brevità

$$\mu = \frac{|D|}{h}\varrho \tag{12}$$

(con che la funzione $\mu$ godrà delle stesse proprietà qualitative ammesse per $\varrho$ e $\mu'$ indicherà il valore di $\mu$ nel punto Q′), ed inoltre

$$V = \int_{L'} \frac{\mu'}{r} dL', \tag{13}$$

la precedente espressione di U diviene

$$U = \int_{\varpi} du'\, dv'\, V. \tag{11'}$$

4. *Richiamo dell'espressione asintotica di un potenziale di linea.* — Fissiamo la nostra attenzione sul potenziale di linea V, definito dalla (13).

Sia O un punto generico della linea potenziante L′ (non angoloso, nè coincidente con un estremo se la linea è aperta); si ponga $\varepsilon = \overline{OQ}$, Q seguitando a designare il punto potenziato (e Q′ il punto potenziante).

In una Nota recente ho dimostrato [1] che (sotto larghe condizioni concernenti la linea potenziante e la densità della distribuzione, le quali, nel caso presente, si trovano tutte verificate) si può porre

$$V = V^{(a)} + W, \tag{14}$$

in cui il secondo addendo W si conserva finito assieme alle sue derivate (rapporto alle coordinate del punto potenziato Q) anche quando Q si avvicina indefinitamente ad O, mentre il primo vale

$$V^{(a)} = -\mu_0 \log(\varepsilon^2 - x^2) - \{ \mu_0 c_0 y + 2\dot{\mu}_0 x \} \log \varepsilon .$$

In questa formula le coordinate $x, y, z$ del punto potenziato Q si riferiscono al triedro principale della linea L′ in O, coll'asse $x$ diretto secondo la tangente (in un senso arbitratrio) e l'asse $y$ secondo la normale principale (verso la concavità di L′); $c_0$ è il valore della curvatura di L′ nel punto O; $\mu_0$ il valore della densità in questo punto; $\dot{\mu}_0$ il valore della de-

[1] Cfr. pag. 13 di questo volume.

rivata di $\mu$ rapporto all'arco della curva L (nel senso assunto come positivo sopra la tangente).

Si noti che, senza alterare il carattere asintotico di $V^{(a)}$, si può aggiungergli (togliendo contemporaneamente all'altro addendo W, che insieme forma V) una qualunque costante, anzi una qualunque funzione, che resti finita assieme alle sue derivate prime. Ci varremo di questa proprietà per rendere omogenei (di dimensione zero rispetto alle lunghezze) gli argomenti dei due logaritmi, che compariscono nella riportata espressione di $V^{(a)}$, sostituendo ad essa la seguente:

$$V^{(a)} = -\mu_0 \log \frac{\varepsilon^2 - x^2}{l^2} - \{ \mu_0 c_0 y + 2\dot{\mu}_0 x \} \log \frac{\varepsilon}{l},$$

dove si intende con $l$ una lunghezza costante (a priori indeterminata).

Ci sarà comodo disporne a suo tempo in modo opportuno.

Occupiamoci intanto di attribuire a $V^{(a)}$ una forma indipendente dalla scelta degli assi coordinati. All'uopo basta pensare al significato geometrico delle coordinate $x, y$, che appariscono in $V^{(a)}$. Esse possono manifestamente riguardarsi come le componenti del vettore OQ secondo le direzioni (positive) della tangente e della normale principale della curva L' in O.

Se dunque si designano con $t_0$ ed $n_0$ tali componenti, si potrà scrivere sotto forma invariantiva

$$V^{(a)} = -\mu_0 \log \frac{\varepsilon^2 - t_0^2}{l^2} - \{ \mu_0 c_0 n_0 + 2\dot{\mu}_0 t_0 \} \log \frac{\varepsilon}{l}. \tag{15}$$

Non sarà male aggiungere l'osservazione seguente:

Ove si facciano intervenire le coordinate curvilinee $u, v, w$, l'elemento d'arco d'una generica curva L vale $\frac{1}{h} dw$; d'altra parte $\mu$, a norma della (12), può anche considerarsi come funzione di $u, v, w$; ne viene, riferendosi in particolare al punto O, e servendosi di notazione evidente,

$$\dot{\mu}_0 = \frac{1}{h_0} \left( \frac{d}{dw} \frac{|D|}{h} \varrho \right)_0. \tag{12'}$$

Per mantenere la presente Nota entro i limiti dovuti, rimetto la continuazione ad una Nota II, che recherà il medesimo titolo.