ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

invece che, entro un certo tempo, l'aumento dell'acqua d'imbibizione nelle lenti che s'imbevono in acqua è inversamente proporzionale al loro peso. Sarebbe da supporre che, quanto maggiore è la superficie relativamente alla massa della lente (lenti piccole), tanto maggiore dovesse essere la quantità d'acqua perduta in un dato tempo, come trovammo essere tanto maggiore la quantità in peso d'acqua assunta: invece non è così.

Si direbbe che il processo di disimbibizione si svolge con un meccanismo diverso da quello di imbibizione.

Matematica. — *Sopra alcune formole fondamentali relative alle equazioni integrali*. Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrispondente LEVI-CIVITA.

Si consideri l'equazione integrale non omogenea, col parametro λ:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int \mathrm{K}(x\,,y)\,\varphi(y)\,dy,$$

ove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, $f(x)$ una funzione data, $\mathrm{K}(x\,,y)$ una funzione pure data (nucleo), atta all'integrazione, ecc. L'integrale poi si intende preso fra due limiti costanti qualunque a e b $(a < b)$.

Supponendo che il nucleo $\mathrm{K}(x\,,y)$ sia una funzione simmetrica di x e y, o, più generalmente, il prodotto di una funzione simmetrica per una funzione positiva $p(y)$, ho dimostrato, in modo assai semplice, in una Nota pubblicata circa un anno fa [1], che la funzione $\varphi(x)$, riguardata come funzione del parametro λ, non può avere che *poli semplici* (e reali). Il teorema è stato di poi esteso dal Goursat al caso di equazioni integrali con nuclei più generali.

Da tale teorema, e dalla forma dell'equazione precedente, risulta dunque che la funzione $\varphi(x)$ è esprimibile con una formola del tipo:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_n a_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda},$$

ove a_n indica una costante, λ_n un generico polo, e il corrispondente residuo $\varphi_n(x)$, come ho mostrato nella mia Nota, soddisfa all'equazione integrale omogenea:

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int \mathrm{K}(x\,,y)\,\varphi_n(y)\,dy\,, \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots)$$

che determina $\varphi_n(x)$ a meno di un fattor costante arbitrario.

[1] Boggio, *Un théorème sur les équations intégrales* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome CXLVI, octobre 1907).

Orbene, con un procedimento pressochè identico a quello sviluppato nella mia Nota, si possono, con tutta facilità, determinare i coefficienti a_n, dopo di che la formola precedente riesce identica ad una elegante formola di E. Schmidt ([1]), che qui viene così stabilita nel modo più naturale e semplice. Da essa si traggono poi subito alcune formole fondamentali, che Hilbert e Schmidt hanno stabilito in modo assai meno semplice.

1. Si abbia l'equazione integrale:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int K(x, y)\, \varphi(y)\, dy, \tag{1}$$

e supponiamo che $K(x, y)$ sia una funzione *simmetrica* di x e y; ponendo:

$$\psi(x) = \varphi(x) - f(x), \tag{2}$$

la (1) diventa:

$$\psi(x) = \lambda \int K(x, y)\, [f(y) + \psi(y)]\, dy. \tag{3}$$

Quest'equazione integrale, avendo il nucleo simmetrico, ha almeno un polo; chiamando λ_1 quello di minimo valor assoluto, poniamo:

$$\psi(x) = a_1 \lambda \frac{\varphi_1(x)}{\lambda_1 - \lambda} + \psi_1(x), \tag{4}$$

ove a_1 è una costante da determinarsi, e $\psi_1(x)$ una funzione regolare per $\lambda = \lambda_1$.

Sostituendo nella (3) si ha:

$$\begin{aligned} &a_1 \lambda \varphi_1(x) + (\lambda_1 - \lambda)\, \psi_1(x) = \\ &= \lambda \int K(x, y) \{ a_1 \lambda \varphi_1(y) + (\lambda_1 - \lambda) [f(y) + \psi_1(y)] \} \, dy, \end{aligned} \tag{5}$$

onde, ponendo $\lambda = \lambda_1$:

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 \int K(x, y)\, \varphi_1(y)\, dy. \tag{6}$$

Sostituendo nel secondo membro della (5) all' integrale relativo a φ_1 il suo valore (6), si ha:

$$\begin{aligned} &a_1 \frac{\lambda}{\lambda_1} (\lambda_1 - \lambda)\, \varphi_1(x) + (\lambda_1 - \lambda)\, \psi_1(x) = \\ &\qquad = \lambda(\lambda_1 - \lambda) \int K(x, y)\, [f(y) + \psi_1(y)]\, dy, \end{aligned}$$

e dividendo per $\lambda_1 - \lambda$:

$$a_1 \frac{\lambda}{\lambda_1} \varphi_1(x) + \psi_1(x) = \lambda \int K(x, y)\, [f(y) + \psi_1(y)]\, dy; \tag{7}$$

[1] Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*; I Teil (Mathematische Annalen, 63 Band, 1907).

per $\lambda = \lambda_1$ risulta:

$$a_1 \varphi_1(x) + \psi_1(x) = \lambda_1 \int \mathrm{K}(x\,,y)\,[f(y) + \psi_1(y)]\,dy\,. \tag{8}$$

Poichè la (6) determina $\varphi_1(x)$ a meno di un fattor costante arbitrario, si può disporre di esso in guisa che:

$$\int [\varphi_1(x)]^2\,dx = 1\,;$$

moltiplicando poi la (6) per $\psi_1(x)\,dx$, la (8) per $\varphi_1(x)\,dx$, integrando e sottraendo, si ottiene:

$$a_1 = \lambda_1 \iint \mathrm{K}(x\,,y)\,f(x)\,\varphi_1(y)\,dx\,dy\,,$$

che, per la (6), si riduce ad:

$$a_1 = \int f(x)\,\varphi_1(x)\,dx\,; \tag{9}$$

così la costante a_1 è determinata.

2. Dalle (7), (6) segue che la funzione $\psi_1(x)$ soddisfa all'equazione integrale:

$$\psi_1(x) = \lambda \int \mathrm{K}(x\,,y)\,[f(y) - a_1\,\varphi_1(y) + \psi_1(y)]\,dy\,,$$

che è del tutto analoga alla (3), quindi avrà almeno un polo; chiamando λ_2 quello di minimo valor assoluto (il quale, per altro, non potrà essere inferiore a $|\lambda_1|$), si può porre, similmente alla (4):

$$\psi_1(x) = a_2 \lambda \frac{\varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda} + \psi_2(x)\,,$$

ove a_2 è una costante da determinarsi, e $\psi_2(x)$ una funzione regolare per $\lambda = \lambda_2$,

Con una formola analoga alla (9) avremo quindi:

$$a_2 = \int [f(x) - a_1\,\varphi_1(x)]\,\varphi_2(x)\,dx\,,$$

che si riduce alla:

$$a_2 = \int f(x)\,\varphi_2(x)\,dx\,, \tag{10}$$

perchè sussiste la relazione di ortogonalità, che si verifica subito:

$$\int \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = 0\,.$$

L'espressione (10) è evidentemente della forma (9).

La funzione $\psi_2(x)$ soddisfa poi all'equazione integrale:

$$\psi_2(x) = \lambda \int \mathrm{K}(x, y)\,[f(y) - a_1\varphi_1(y) - a_2\varphi_2(y) + \psi_2(y)]\,dy\,.$$

La (4) porge quindi:

$$\psi(x) = a_1\lambda\,\frac{\varphi_1(x)}{\lambda_1 - \lambda} + a_2\lambda\,\frac{\varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda} + \psi_2(x)\,.$$

Così proseguendo, e supponendo dapprima che esistano solo m poli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, si arriva all'espressione:

$$(11)\qquad \psi(x) = a_1\lambda\,\frac{\varphi_1(x)}{\lambda_1 - \lambda} + a_2\lambda\,\frac{\varphi_2(x)}{\lambda_2 - \lambda} + \cdots + a_m\lambda\,\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m - \lambda} + \psi_m(x)\,,$$

in cui:

$$a_n = \int f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int \mathrm{K}(x, y)\,\varphi_n(y)\,dy \qquad (n = 1, 2, \dots, m)$$

$$\int [\varphi_n(x)]^2\,dx = 1\,,$$

e $\psi_m(x)$ deve soddisfare all'equazione integrale:

$$(12)\qquad \psi_m(x) = \lambda \int \mathrm{K}(x, y)\,[f(y) - a_1\varphi_1(y) - \cdots - a_m\varphi_m(y) + \psi_m(y)]\,dy\,.$$

Ora, poichè non esistono ulteriori poli per $\psi(x)$, quest'equazione integrale non deve avere alcun polo; per conseguenza è necessario e sufficiente che sia identicamente $\psi_m(x) = 0$, e allora la (11) si riduce a:

$$(13)\qquad \psi(x) = \lambda \sum_1^m{}_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \int f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\,.$$

Dalla (12) segue ancora:

$$(14)\qquad \int \mathrm{K}(x, y)\,f(y)\,dy = \sum_1^m{}_n \frac{1}{\lambda_n}\,\varphi_n(x) \int f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\,,$$

ovvero:

$$\int \mathrm{K}(x, y)\,f(y)\,dy = \sum_1^m{}_n \varphi_n(x) \iint \mathrm{K}(x, y)\,f(x)\,\varphi_n(y)\,dx\,dy\,;$$

ponendo:

$$(15)\qquad g(x) = \int \mathrm{K}(x, y)\,f(y)\,dy\,,$$

avremo:

$$(16)\qquad g(x) = \sum_1^m{}_n \varphi_n(x) \int g(y)\,\varphi_n(y)\,dy\,.$$

3. Supponiamo ora che esistano infiniti poli, e, disposti in ordine di grandezza crescente rispetto al loro valor assoluto, siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ Allora, ricordando anche la (2), le (13), (14), (16) diventano:

$$(13') \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_1^\infty{}_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \int f(x)\, \varphi_n(x)\, dx$$

$$(14') \qquad \int \mathrm{K}(x, y)\, f(y)\, dy = \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x) \int f(x)\, \varphi_n(x)\, dx$$

$$(16') \qquad g(x) = \sum_1^\infty{}_n \varphi_n(x) \int g(x)\, \varphi_n(x)\, dx\,,$$

ove $g(x)$ è ancora espresso dalla (15).

Le varie serie che figurano nei secondi membri sono assolutamente ed uniformemente convergenti, e ciò risulta subito, come osserva lo Schmidt, dal teorema di convergenza dato al § 2 della sua Memoria. È poi assai facile verificare che la (13′) soddisfa effettivamente alla (1).

La (13′) è dovuta a Schmidt, le (14′), (16′) ad Hilbert [1]. Queste formole di Hilbert sono pure state ottenute da Schmidt nella sua Memoria, con metodo del tutto diverso, e meno semplice, di quello qui esposto; da esse egli ha poi dedotto la (13′).

Dalla (14′) risulta:

$$\iint \mathrm{K}(x, y)\, h(x)\, f(y)\, dx\, dy = \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{\lambda_n} \int h(x)\, \varphi_n(x)\, dx \int f(y)\, \varphi_n(y)\, dy\,;$$

è questa una formola fondamentale di Hilbert, che egli ha dedotto, mediante passaggio al limite, dalla formola di trasformazione di una forma quadratica in forma canonica.

Matematica. — *Del legame fra l'equazione di Fredholm e le equazioni differenziali lineari ordinarie*. Nota del dott. MAURO PICONE, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

Il risultato principale ottenuto nella mia Nota: *I teoremi d'esistenza per gli integrali di un'equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni*, pubblicata in questi Rendiconti (15 marzo 1908), consiste nel dimostrare che l'integrale $y(x, \lambda)$ dell'equazione differenziale lineare ordinaria

$$(1) \qquad y^{(n)} = \lambda\,[p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y] + f(x)$$

soddisfacente alle n condizioni lineari

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \int_a^b a_{ik}(\tau)\, y^{(k-1)}(\tau)\, d\tau = l_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

[1] Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*; I Mitteilung (Nachrichten von der Königl. Gesell. der Wissenschaften zu Göttingen, 1904).

od anche alle altre:

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{l=1}^{l=m_{ik}} a_{ikl}\, y^{(k-1)}(\tau_{ikl}) = l_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nelle seguenti ipotesi:

a) nel tratto finito (a, b) le $p_i(x)$ e $f(x)$ sono funzioni finite e continue,

b) per le condizioni (2), le $a_{ik}(\tau)$ sono funzioni di τ integrabili nel tratto (a, b) assegnate insieme alle quantità l_i, e per le condizioni (3) i punti τ_{ikl} son di (a, b) in numero finito $\leq \sum_{i,k} m_{ik}$, assegnati insieme alle quantità a_{ikl} e l_i,

c) *esiste uno ed un sol polinomio in* x *di grado* $n-1$ *soddisfacente alle condizioni* (2) *o alle condizioni* (3),

è soluzione di una certa e facilmente costruibile equazione integrale di Fredholm

$$(4) \qquad y(x) + \lambda \int_a^b f(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = \varphi(x),$$

dove $f(x, \xi)$ e $\varphi(x)$ sono funzioni finite e integrabili dei loro argomenti.

E viceversa, nelle dette ipotesi, ogni soluzione dell'equazione (4) è integrale dell'equazione (1) soddisfacente alle condizioni (2) o alle condizioni (3).

Questo teorema ci permette di rappresentare *immediatamente*, in grazia della formula risolutiva data dal Fredholm dell'equazione (4), l'integrale $y(x, \lambda)$ come quoziente di due trascendenti intiere in λ, nel quale quoziente è numeratore una trascendente intiera in λ avente come coefficienti delle varie potenze determinate funzioni della x, ed è denominatore il determinante $D_{\lambda f}$ dell'equazione (4).

La possibilità di una tale rappresentazione dell'integrale $y(x, \lambda)$, anche quando non si verifichi l'ipotesi *c*), è del resto cosa ovvia dopo il teorema di Picard [1], secondo il quale un integrale della (1) determinato coll'assegnare nel punto a i valori di

$$y, y', \ldots, y^{(n-1)}$$

è, rispetto a λ, una trascendente intiera in tutto il piano complesso.

Scopo della presente Nota è di dimostrare che l'ipotesi *c*) oltrechè, come si è visto, sufficiente, è necessaria per la validità del nostro teorema; di dimostrare cioè che:

Ove non esista uno ed un sol polinomio in x *di grado* $n-1$ *soddisfacente alle condizioni* (2) *o alle condizioni* (3), *la trascendente* $y(x, \lambda)$ *non si può pensare soluzione di nessuna equazione integrale come la* (4).

[1] Picard, *Traité d'A.*, t. III, pp. 92-93.

Reputo tale risultato pubblicabile come necessario complemento alla mia citata Nota e per la ragione ch'esso non viene messo abbastanza in luce nella classica trattazione dell'Hilbert [1] sulle equazioni differenziali lineari ordinarie del second'ordine e che nella trattazione del Mason [2] sullo stesso argomento sembra addirittura affermato, contrariamente a quanto qui dimostriamo, che la trascendente $y(x, \lambda)$ integrale dell'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)\, y = f(x),$$

soddisfacente alle condizioni

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = c_1\,, \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=b} = c_2$$

o alle altre

$$y(a) - y(b) = c_1\,, \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} - \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=b} = c_2\,,$$

condizioni che non verificano l'ipotesi c), è soluzione di un'equazione integrale come la (4).

In ultimo, al § 3, è osservato che i risultati della citata mia Nota permettono, per valori di λ di modulo convenientemente limitato, un calcolo per *approssimazioni successive* dell'integrale della (1) soddisfacente alle condizioni (2) o alle (3), supponendo che le ipotesi a), b) e c) siano verificate.

§ 1.

Ricordiamo che nel citato teorema di Picard è dimostrato che, supposto che l'integrale $\eta(x, \lambda)$ della (1) determinato dalle condizioni iniziali

$$\eta(a, \lambda) = l_1\,, \quad \left[\frac{\partial \eta}{\partial x}\right]_{x=a} = l_2\,, \ldots \quad \left[\frac{\partial^{n-1}\eta}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=a} = l_n\,,$$

sia rappresentato dalla serie

$$\eta_0(x) + \eta_1(x)\,\lambda + \cdots + \eta_\nu(x)\,\lambda^\nu + \cdots,$$

questa, per qualunque valore di λ, è, rispetto ad x, uniformemente e assolutamente convergente in (a, b). Il Dini [3] completò questo teorema osservando di più che anche le serie

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{d^i\eta_\nu}{dx^i}\,\lambda^\nu \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

[1] Hilbert, Göttinger Nachrichten, zweite Mitteilung, 1904, Heft 3.

[2] Masen, *Zur Theorie der Randwertaufgaben,* Math. Ann., 58 Bd. (1904), S. 528.

[3] Dini, Annali di Mat., t. XII, S. III, pag. 179 e seg.

per qualunque valore di λ, sono, rispetto a x, uniformemente e assolutamente convergenti in (a, b), per modo che si potrà porre:

$$\frac{\partial^i \eta}{\partial x^i} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{d^i \eta_\nu}{dx^i} \lambda^\nu \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Ciò ricordato, diciamo $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ un sistema di n integrali indipendenti dell'equazione omogenea

$$(5) \qquad y^{(n)} = \lambda \left[p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y \right],$$

e η un integrale particolare dell'equazione (1); l'integrale generale della (1) sarà rappresentato dalla combinazione

$$\eta(x, \lambda) + c_1 \eta_1(x, \lambda) + \cdots + c_n \eta_n(x, \lambda),$$

dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono le n costanti arbitrarie.

Le condizioni (2) o le condizioni (3) si traducono in n equazioni lineari nelle $c_1, c_2, \ldots, c_n$, i cui termini noti e il cui determinante risulteranno delle trascendenti intiere in λ. Diciamo $\Delta(\lambda)$ questo determinante. Per ogni valore di λ per cui sia $\Delta(\lambda) \neq 0$, la trascendente $y(x, \lambda)$, integrale della (1) soddisfacente alle (2) o alle (3), verrà pertanto certamente rappresentata da

$$y(x, \lambda) = \eta(x, \lambda) + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[c_1(\lambda) \eta_1(x, \lambda) + \cdots + c_n(\lambda) \eta_n(x, \lambda) \right],$$

dove $c_1(\lambda), c_2(\lambda), \ldots, c_n(\lambda)$ rappresentano altrettante trascendenti intiere. Poniamo

$$\overline{y}(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[c_1(\lambda) \eta_1(x, \lambda) + \cdots + c_n(\lambda) \eta_n(x, \lambda) \right]$$

e supponiamo che le serie di potenze

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} l_{i\nu} \lambda^\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

rappresentino i risultati delle operazioni indicate dai primi membri di (2) o di (3) fatte su $\eta(x, \lambda)$.

La trascendente $\overline{y}(x, \lambda)$ sarà l'integrale della (5) soddisfacente alle condizioni (2) o (3) dove al posto delle l_i vi sono le quantità

$$l_i - \sum l_{i\nu} \lambda^\nu .$$

§ 2.

Supponiamo che non sia verificata l'ipotesi c), supponiamo cioè che non esista un polinomio in x di grado $n-1$ soddisfacente alle (2) *o* *alle* (3) *con le* l_i *affatto arbitrarie; allora la trascendente* $y(x, \lambda)$ *avrà di necessità un polo nell'origine.*

Difatti, supponiamo che, nella detta ipotesi, la $y(x, \lambda)$ non abbia un polo nel punto zero; allora la $\overline{y}(x, \lambda)$ avrà un punto ordinario nel punto zero e perciò, in un conveniente intorno di questo punto, essa ammetterà uno sviluppo procedente secondo le potenze intiere, positive e crescenti di λ.

Si abbia:

$$\overline{y}(x, \lambda) = y_0(x) + y_1(x)\lambda + \cdots + y_\nu(x)\lambda^\nu + \cdots \tag{6}$$

Poichè è

$$\overline{y}(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k=1}^{k=n} c_k(\lambda)\, \eta_k(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k=1}^{k=n} c_k(\lambda) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \eta_{k\nu}(x)\lambda^\nu,$$

e pel teorema di Dini

$$\frac{\partial^i \overline{y}(x, \lambda)}{\partial x^i} = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k=1}^{k=n} c_k(\lambda) \frac{\partial^i \eta_k(x, \lambda)}{\partial x^i} = \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k=1}^{k=n} c_k(\lambda) \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{d^i \eta_{k\nu}}{dx^i} \lambda^\nu$$

posto che sia, nel nominato intorno dell'origine:

$$\frac{\partial^i \overline{y}(x, \lambda)}{\partial x^i} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} y_{i\nu}(x)\lambda^\nu \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

si avrà

$$y_{i\nu}(x) = \frac{d^i y_\nu(x)}{dx^i}$$

e quindi

$$\frac{\partial^i \overline{y}(x, \lambda)}{\partial x^i} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{d^i y_\nu}{dx^i} \lambda^\nu \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Introduciamo la (6) e le (7) nella (5); se ne ricaverà:

$$\begin{aligned} & y_0^{(n)}(x) = 0 \\ & y_{\nu+1}^{(n)}(x) = p_1(x)\, y_\nu^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\, y_\nu(x) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \end{aligned} \tag{8}$$

Introduciamo la (6) e le (7) nelle (2) o nelle (3), dove al posto delle l_i vi sono le quantità $l_i - \sum l_{i\nu}\lambda^\nu$; se ne ricaverà che la funzione $y_0(x)$ soddisfa alle (2) o alle (3), dove al posto delle l_i vi sono le quantità $l_i - l_{i0}$, e che le funzioni $y_\nu(x)$ $(\nu > 0)$ soddisfano alle (2) o alle (3), dove al posto delle l_i vi sono le particolari quantità $- l_{i\nu}$.

Ora la $y_0(x)$, come dice la (8), è un polinomio in x di grado $n-1$. Per cui l'ipotesi che $y(x, \lambda)$ non abbia un polo nell'origine, porta all'esistenza di un polinomio in x di grado $n-1$ soddisfacente alle (2) o alle (3), dove al posto delle l_i vi sono le quantità $l_i - l_{i0}$, il che, per l'arbitrarietà delle $l_i - l_{i0}$, dovuta all'arbitrarietà delle l_i, è assurdo.

La trascendente $y(x, \lambda)$, ove l'ipotesi c) sia in difetto, non potrà dunque essere soluzione di un'equazione integrale come la (4), poichè una soluzione della (4) non ha mai un polo nel punto zero. Si osservi invero che il determinante $D_{\lambda f}$ della (4) ha lo sviluppo:

$$1+\lambda\int_a^b f(x_1, x_1)\,dx_1+\frac{\lambda^2}{2\,!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix} f(x_1, x_1) & f(x_1, x_2)\\ f(x_2, x_1) & f(x_2, x_2)\end{vmatrix}\,dx_1\,dx_2+\cdots$$

Col nostro ragionamento si può dunque affermare che nel difetto dell'ipotesi c) la trascendente $\Delta(\lambda)$ si annulla nell'origine, e che se μ è l'ordine di questo zero di $\Delta(\lambda)$, $\mu \geq 1$, fra le $c_k(\lambda)$ ve ne ha almeno una che nell'origine ha uno zero d'ordine $<\mu$.

§ 3.

Supponiamo, in quest'ultimo paragrafo, verificate le ipotesi a), b) e c). Diciamo $g(x)$ il polinomio in x di grado $n-1$ soddisfacente alle condizioni (2) o alle (3), e diciamo $G(x, \xi)$ la funzione di Green relativa alle condizioni:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\int_a^b a_{ik}(\tau)\,y^{(k-1)}(\tau)\,d\tau=0 \tag{9}$$

o alle altre:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1}^{l=m_{ik}} a_{ikl}\,y^{(k-1)}(\tau_{ikl})=0 \quad (^1). \tag{10}$$

Se $\varphi(x)$ indica una funzione finita e continua in (a, b), posto:

$$y(x)=\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+g(x)$$

si avrà

$$y^{(n)}(x)=\varphi(x)$$

e la $y(x)$ soddisferà alle condizioni (2) o alle (3); mentre, posto

$$y(x)=\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\;,$$

(1) V. la mia citata Nota.

la $y(x)$ soddisferà alla stessa equazione differenziale e alle condizioni (9) o alle (10).

La trascendente $y(x, \lambda)$, integrale della (1) soddisfacente alle (2) o alle (3), essendo soluzione di un'equazione integrale come la (4), non ha un polo nel punto zero. Perciò, per valori di λ di modulo convenientemente limitato, la $y(x, \lambda)$ ammetterà uno sviluppo procedente secondo le potenze positive, intiere e crescenti di λ. Si abbia

$$y(x, \lambda) = y_0(x) + y_1(x)\lambda + \cdots + y_\nu(x)\lambda^\nu + \cdots$$

Si avrà

$$\frac{\partial^i y(x, \lambda)}{\partial x^i} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{d^i y_\nu}{dx^i} \lambda^\nu .$$

Introducendo questi sviluppi nella (1) e nelle condizioni (2) o (3), si trova che fra le $y_\nu(x)$ sussistono le relazioni

$$\begin{aligned} y_0^{(n)}(x) &= f(x) \\ y_{\nu+1}^{(n)}(x) &= p_1(x)\, y_\nu^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\, y_\nu(x) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \end{aligned}$$

e che la y_0 soddisfa alle condizioni (2) o (3), mentre le y_ν ($\nu > 0$) alle (9) o (10). Queste relazioni permettono un calcolo ricorrente per le y_ν. Si avrà infatti:

$$y_0(x) = g(x) + \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

$$y_{\nu+1}(x) = \int_a^b G(x, \xi) [p_1(\xi)\, y_\nu^{(n-1)}(\xi) + \cdots + p_n(\xi)\, y_\nu(\xi)]\, d\xi .$$

Possiamo dunque affermare che:

Per valori di λ convenientemente limitati di modulo, la trascendente $y(x, \lambda)$ può essere calcolata con un metodo di approssimazioni successive.

Precisamente, se ϱ è il modulo dello zero di $D_{\lambda f}$ di minimo modulo, il metodo delle approssimazioni successive per il calcolo di $y(x, \lambda)$ può essere certamente adottato pei valori di λ per cui è $|\lambda| < \varrho$.

Tale metodo, per $n = 2$, coincide perfettamente con quello classico adottato da Picard [1] per ottenere un integrale dell'equazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda A(x) y = 0 ,$$

soddisfacente alle condizioni ai limiti

$$y(a) = \alpha \ , \ y(b) = \beta .$$

[1] Picard, *Traité d'A.*, t. III, chap. VI. Vedi anche il cap. IV della mia tesi di laurea: *Su un problema al contorno nelle equazioni differenziali lineari ordinarie del second'ordine*; Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. X.