ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Matematica. — *Sulla continuità di un integrale rispetto ad un parametro.* Nota della dott.^{ssa} P. QUINTILI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica.* Nota di F. SEVERI, presentata dal Socio C. SEGRE.

La regolarità del sistema aggiunto alle sezioni piane di una superficie algebrica, è stata dimostrata dal sig. Picard « par une voie détournée », mediante gli integrali semplici appartenenti alla superficie (¹).

Credo di rispondere a un desiderio dei cultori di geometria algebrica, esponendo in questa Nota una dimostrazione geometrica diretta del teorema di Picard. La mia dimostrazione conduce anzi ad un risultato più generale: la regolarità del sistema $|C'|$ aggiunto ad una curva irriducibile qualunque C, che sia atta a definire un sistema continuo di grado > 0.

Mi sembra degno di nota anche il risultato del n. 1, di cui mi giovo per stabilire la regolarità di $|C'|$: sopra la curva generica di un qualunque sistema lineare irriducibile $|D|$ che contenga parzialmente C, il sistema completo $|D - C|$ stacca una serie *completa*.

Questo è forse il primo di una catena di teoremi che condurranno a meglio precisare il teorema di Riemann-Roch sopra una superficie. Intanto al n. 4 ne deduco un nuovo significato per la sovrabbondanza di un sistema lineare.

1. Sulla superficie F consideriamo un sistema lineare irriducibile $|D|$, effettivamente privo di punti base, ed una curva irriducibile C, la quale sia atta a definire un sistema continuo (in particolare lineare) almeno ∞^1, di grado > 0, virtualmente privo di punti base.

Dimostreremo che se esiste il sistema lineare

$$|E| = |D - C|,$$

esso sega su una generica D una serie completa.

(¹) Picard, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Journal de Crelle, Bd. 129, 1905). Ved. pure il trattato di Picard e Simart (Paris, Gauthier-Villars, 1906) a pag. 437 del t. II.

Indichiamo infatti con Σ il sistema continuo completo cui appartiene $|D|$ e ricordiamo il teorema (di Enriques) secondo cui è completa la serie caratteristica di Σ (¹).

Sia D_0 una generica D, e G il gruppo comune a C, D_0. Denotiamo con Σ_0 il sistema algebrico formato dalle curve di Σ passanti per G: in forza del teorema ricordato, la serie lineare completa residua di G rispetto alla serie caratteristica di D_0 — la qual serie residua contiene totalmente quella segata su D_0 da $|E|$ — è staccata su D_0, fuori di G, dalle curve di Σ_0 infinitamente vicine a D_0.

Ciò posto, vediamo com'è costituito il sistema Σ_0. Anzitutto ad esso appartiene il sistema Σ_1, di tutte le curve di Σ che contengono come parte C. Dico che, toltone Σ_1, in Σ_0 restano un numero finito di sistemi lineari.

Dovremo perciò provare che le curve di Σ_0 che non contengono come parte C, appartengono ad un numero finito di sistemi lineari. Tali curve segnano su C il gruppo G, e appartengono quindi alla varietà algebrica H costituita dalle curve di Σ che staccano su C gruppi equivalenti a G.

Ora, la varietà H è formata da un numero finito di varietà irriducibili, ciascuna delle quali, essendo costituita da curve che staccano gruppi equivalenti sopra una curva, C, atta a definire un sistema continuo di grado > 0, è contenuta totalmente in un sistema lineare (anzi nel caso attuale forma addirittura un sistema lineare) (²).

Si conclude pertanto che il sistema Σ_0 costituisce una varietà riducibile, composta dal sistema Σ_1 e da un certo numero di sistemi lineari

$$|D_0|, |D_1|, \ldots, |D_s|,$$

tra i quali havvi il sistema $|D_0|$ delle curve D che passano per G (³).

Ne deriva che le curve di Σ_0 infinitamente vicine a D_0, appartengono tutte quante al sistema lineare $|D_0|$, perchè tali curve non possono appartenere nè ai sistemi $|D_1|, \ldots, |D_s|$ *distinti* da $|D_0|$, nè al sistema Σ_1 le cui curve contengono tutte una parte non infinitamente vicina a D_0.

Il sistema lineare $|D_0|$, col gruppo base assegnato G, ha dunque la serie caratteristica completa.

Ora, se $r+1$ è la dimensione di $|D_0|$, la dimensione di $|E|$ risulta uguale ad r, perchè basta imporre alle D_0 di passare per un punto generico

(¹) Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rend. della R. Acc. di Bologna, dicembre 1904); ved. pure Severi, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* (Rend. del Circolo mat. di Palermo, t. XX, aprile 1905).

(²) Severi, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (Atti del R. Istituto veneto, t. LXV, aprile 1906), n. 2.

(³) La varietà spezzata Σ_0 è però *connessa*, in quanto ciascun sistema $|D_i|$ ha comune con Σ_1 un sistema lineare di dimensione inferiore di un'unità rispetto a quella di $|D_i|$.

di C, per ottenere tutte le D che contengono come parte C. La dimensione della serie g segata da $|E|$ su D_0, uguaglia quindi la dimensione della serie caratteristica di $|D_0|$: ne deriva che le due serie coincidono, cioè che la prima è completa.

Se i sistemi $|D|, |C|$ posseggono punti base assegnati, si ricade subito nel caso precedente mediante una trasformazione che muti quei punti base in curve eccezionali, a condizione però che i punti base di $|D|$ si assegnino con la loro molteplicità effettiva.

Possiamo pertanto enunciare il teorema seguente:

Avendosi sopra una superficie algebrica due sistemi lineari completi irriducibili $|C|, |D|$ — *di cui il primo può anche essere* ∞^0, *purchè* C *sia in tal caso atta a definire un sistema continuo di grado* > 0 — *se esiste il sistema* $|D - C|$, *esso sega sopra una generica* D *una serie lineare completa.*

Quanto ai punti base, si tenga presente che $|D|$ deve essere privo di punti base ipermultipli.

Osservazione. — Nel corso del ragionamento abbiamo imparato a *costruire sopra una superficie irregolare un sistema lineare irriducibile colla serie caratteristica completa:* è il sistema $|D_0|$.

2. Si mantengano le notazioni e le ipotesi introdotte al principio del numero precedente, e si supponga di più che il sistema $|E|$ sia regolare; in tal guisa che la sua dimensione risulterà espressa da

$$(1) \qquad r = n - \pi + p_a + 1\,,$$

ove n, π denotano il grado e il genere virtuali di $|E|$, e p_a il genere aritmetico di F.

La dimensione del sistema $|C'|$ aggiunto alla curva C, virtualmente priva di punti base, è data da

$$\varrho = \varpi - 1 + p_a + \varepsilon \qquad (\varepsilon \geq 0)\,,$$

ove ϖ è il genere virtuale di C. Poichè il sistema $|E + C'|$ è aggiunto a $|D|$, le curve C' segneranno su D_0 gruppi residui della serie g rispetto alla serie canonica: l'indice di specialità di g risulta pertanto espresso da

$$i = \varrho + 1 + \eta \qquad (\eta \geq 0).$$

Quanto all'ordine della serie g, esso è evidentemente eguale ad $n + j$, ove j denota il numero dei punti di un gruppo (E, C) onde la dimensione di g, cioè del sistema $|E|$, viene uguale a

$$r = n + j - \alpha + i = n + j - \alpha + \varpi + p_a + \varepsilon + \eta\,,$$

α indicando il genere di D_0.

Se si osserva che

$$\alpha = \pi + \varpi + j - 1,$$

dalla relazione precedente si ricava

$$r = n - \pi + p_a + 1 + \varepsilon + \eta,$$

la quale, confrontata colla (1), porge

$$\varepsilon = \eta = 0.$$

Si conclude che:

Quando il sistema $|D\text{-}C|$ — *di cui all'enunciato precedente — è regolare, il sistema* $|C'|$, *aggiunto a* C, *è pure regolare e segna sopra una generica* D *una serie completa.*

3. Prendiamo come modello della nostra superficie una, F, priva di singolarità in un iperspazio. Le curve di un multiplo abbastanza alto $|D|$ delle sezioni iperpiane di F, che passano colla molteplicità $s-1$ pei punti s-pli (accidentali) di C, segano altrove, su questa curva, una serie completa non speciale. Si può di più supporre, crescendo eventualmente l'ordine del multiplo considerato, che i detti passaggi presentino condizioni indipendenti alle D. Indicando con m l'ordine di C, con ϖ_0 il suo genere effettivo, e con l l'ordine delle forme che segnano su F il sistema (completo) $|D|$, sarà

$$\sum \frac{s(s-1)}{2} + [ml - \sum s(s-1) - \varpi_0 + 1] =$$
$$= ml - \varpi_0 - \sum \frac{s(s-1)}{2} - 1 = ml - \varpi + 1$$

il numero delle condizioni che C presenta alle D che debbono contenerla; onde, essendo regolare il sistema $|D|$, il sistema $|E| = |D - C|$ risulterà regolare. Applicando allora il teorema del numero precedente, si perviene alla conclusione che $|C'|$ è regolare.

Tale conclusione è applicabile in particolare quando C sia effettivamente priva di punti multipli, e quindi anche quando C sia dotata di punti multipli, i quali si assegnino colla loro molteplicità effettiva.

Infatti in tal caso una trasformazione birazionale di F avente per punti fondamentali i punti multipli assegnati, muta C in un'altra curva C_1 priva effettivamente di punti multipli, e in questa trasformazione il sistema $|C'|$ aggiunto al sistema $|C|$ col gruppo base definito, vien mutato nel sistema $|C_1'|$ aggiunto a C_1. Onde $|C'|$ è regolare come $|C_1'|$.

Si può dunque enunciare il teorema seguente:

Sopra una superficie algebrica F, *il sistema* $|C'|$ *aggiunto ad una curva* C, *la quale sia atta a definire un sistema continuo che non sia un fascio irrazionale, è regolare.*

Quanto ai punti base, che entrano nella definizione di $|C'|$, è sottinteso che i punti multipli di C si debbano riguardare come accidentali o come assegnati colla loro molteplicità effettiva; ma in questo secondo caso per l'applicabilità del teorema basterà che C appartenga ad un sistema continuo di grado > 0, privo di punti base assegnati.

Applicando la proposizione dimostrata al sistema delle sezioni piane della superficie F, supposta appartenente allo spazio ordinario, si ha il *teorema di Picard*:

Le superficie d'ordine $n-3$, aggiunte ad una superficie F *d'ordine n dello spazio ordinario, segano sopra un piano generico un sistema* (*regolare*) *di deficienza uguale all'irregolarità della superficie; mentre le superficie aggiunte d'ordine $> n-3$ segano su quel piano sistemi completi* (*regolari*).

In altri termini:

Se una curva sghemba può considerarsi come linea doppia di una superficie d'ordine n, la formola di postulazione relativa a quella linea è applicabile per tutti gli ordini maggiori di $n-4$ (ed anche per l'ordine $n-4$ se la superficie è regolare).

4. Un'altra conseguenza dei teoremi dimostrati porta ad assegnare un nuovo significato geometrico per la sovrabbondanza di un sistema lineare irriducibile $|C|$, almeno ∞^2, privo di punti base.

È noto che tale sovrabbondanza è uguale alla somma delle deficienze della serie caratteristica di $|C|$ e della serie segata sopra una C dal sistema canonico. Orbene, noi ora proveremo che:

La sovrabbondanza di un sistema lineare irriducibile $|C|$, almeno ∞^2 e privo di punti base, è uguale alla deficienza della serie segata da $|C'|$ sopra una curva 2C.

Detti n, π il grado e il genere di C, i l'indice di specialità, s la sovrabbondanza, la dimensione r vien data da

$$r = n - \pi + p_a + 1 - i + s. \tag{2}$$

Pel teorema del n. 1 il sistema $|C|$ sega sopra una curva irriducibile 2C, una serie completa g. Se ϱ è la dimensione del sistema $|C'|$ e δ la deficienza della serie segata da $|C'|$ su 2C, l'indice di specialità della serie g risulta uguale a

$$\varrho + 1 - i + \delta,$$

e quindi la dimensione di g, cioè di $|C|$, risulta espressa da

$$\begin{aligned} r &= 2n - (2\pi + n - 1) + \varrho + 1 - i + \delta = \\ &= n - 2\pi + 2 + \varrho - i + \delta . \end{aligned}$$

Pel teorema del n. 3 si ha

$$\varrho = \pi - 1 + p_a,$$

onde viene:

$$r = n - \pi + p_a + 1 - i + \delta ,$$

la quale, confrontata colla (2), porge

$$s = \delta \text{ (1)}.$$

Osservazione. Il teorema dimostrato era noto pel sistema $|C|$ delle sezioni piane di una rigata. In tal caso $|C'|$ non esiste, e la sovrabbondanza di $|C|$ risulta uguale all'indice di specialità della serie segata da $|C|$ su $2C$ (Segre).

Fisica. — *L'emissione luminosa nei vari azimut da parte d'un vapore incandescente in un campo magnetico*. — Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio M. Cantone.

Ammettendo che la ripartizione delle intensità luminose tra le componenti del *doublet* e del *triplet* di Zeeman sia quella che da tutti si ritiene conforme all'esperienza, ebbi a dimostrare in un precedente lavoro [2] che lo scambio d'energia tra due sorgenti identiche S_1 e S_2, situate in campi magnetici ortogonali, è disuguale; e che perciò, per radiazioni di temperatura, il secondo principio sarebbe in difetto.

Avevo inoltre esaminato come dovrebbero modificarsi le ipotesi sulle intensità delle componenti per eludere la contradizione. E ne avevo concluso che:

a) o dev'essere l'emissione totale nel senso delle linee di forza minore di quella nel senso normale,

b) ovvero la ripartizione tra le componenti del *triplet* dev'essere diversa da quella comunemente ammessa; così, se le emissioni complessive in ciascuno dei due azimut sono eguali, dovrebbe essere nulla la componente centrale.

E poichè da prove dirette, eseguite con mezzi insufficienti nell'Istituto Fisico di Messina, non mi risultò la disuguaglianza delle emissioni totali, e d'altra parte la componente centrale certamente non è nulla, ne dedussi che era impossibile ristabilire l'impero del secondo principio, ed emisi perciò l'idea che le radiazioni monocromatiche presentanti il fenomeno Zeeman non possono essere di temperatura.

Il sig. Laue ha pubblicato in proposito una interessante Nota [3], che

(1) Si noti che questa costituisce una *nuova dimostrazione del teorema di Riemann-Roch sulle superficie*, dedotta dal teorema concernente la completezza della serie caratteristica di un sistema continuo completo.

(2) O. M. Corbino, Rend. Linc., t. XVII, pag. 593; 1908.

(3) M. Laue, Physik. Zeitschr., t. IX, p. 617; 1908.