# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XVII.**

2º SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

## Cristallografia. — *Sull'associazione del rutilo con l'ematite.* Nota del Corrispondente C. VIOLA.

Io posso limitarmi a fare poche citazioni relativamente alla storia di quest'associazione, avendola Baumhauer (1) riassunta e illuminata.

È noto che giusta le prime osservazioni dovute a Breithaupt (2) la faccia (100) ovvero (010) del rutilo è parallela alla base *(111)* dell'ematite, e la zona principale [001] di quello dovrebbe essere sempre parallela a una delle tre direzioni principali di questa $[\bar{2}11]$, $[1\bar{2}1]$, $[11\bar{2}]$. I diversi cristalli di rutilo appoggiati sulla base *(111)* dell'ematite sarebbero dunque, secondo Breithaupt, orientati in tre direzioni principali dell'ematite facenti 120° risp. 60° fra di loro. Se la regola di questa associazione fosse così, una faccia }101{ del rutilo riuscirebbe vicinissima a una delle faccie *}100{* dell'ematite, poichè l'angolo polare di queste rispetto a *(111)* dell'ematite è di 57°,30′ secondo Strüver (3) e di 57°,37′ secondo Koksharow e Dana (4), dove che l'angolo polare della faccia (111) del rutilo rispetto a (100) di questo è di 57°,12′,44″ secondo Miller e Dana (5), e di 57°,13′,25″ secondo Baumhauer (6).

Haidinger (7), G. vom Rath (8), Kenngott (9), Pelikan (10), Schrauf (11), Bücking (12) e altri confermarono la legge di associazione annunciata da Breithaupt.

Nuova luce su questo importante argomento, nonchè ricco contributo, viene gettata da una Memoria di Baumchauer (13), dove è dimostrato che la

(1) H. Baumhauer, *Ueber die regelmässige Verwachsung von Rutil und Eisenglanz.* Sitzb. d. k. preuss. Akad. der Wissenschaften, Berlin, 1906, 322.

(2) A. Breithaupt, Min. 1836, *1*, 309, fig. 159; 1847, *3*, 794.

(3) G. Strüver, *Studi cristallografici intorno all'ematite di Traversella.* Atti della R. Accad. di Torino, 1872, VII, 377.

(4) Dana, Man. of Mineral. 1892, 214.

(5) Dana, Man. of Mineral. 189, 237.

(6) H. Baumhauer, *Ueber den Rutil des Binnentals im Canton Wallis.* Comptes rendus d. 4e Congrès scientif. intern. d. Cathol. 1897. Fribourg 1898. Zeitsch. f. Krystall. *33*, 653.

(7) W. Haidinger, Handb. d. bestimm. Mineral. 1845, 281, fig. 457.

(8) G. vom Rath. Zeitsch. d. geol. Gesellsch. 1862, *14*, 414, 415; Miner. Mitt. Poggendorf Annalen, *152* (228), 21.

(9) Kenngott, Mineral. Schweiz, 1866, 27.

(10) Pelikan, Tschermak'sche Mineral. Mitteil. N. F. *16*, 58.

(11) Schrauf, Wien. Sitzb. Akad. d. Wiss. 1869, *27*, 214; Neues Jahrb. f. Min. 1870, 355. Zeitsch. f. Krystall. *9*, 470.

(12) H. Bücking, Zeitsch. f. Krystall. I, 562, II, 416.

(13) H. Baumhauer, *Ueber die regelmässige Verwachsung von Rutil und Eisenglanz.* Sitzb. d. k. preuss. Akad. d. Wiss. Berlin, 1906, 322.

legge di Breithaupt non è verificata pienamente dal rutilo in associazione con l'ematite.

Baumhauer pervenne a questo risultato casualmente, come egli stesso asserisce, osservando due individui di rutilo appoggiati con la loro faccia (100) sulla base (*111*) dell'ematite; i quali due individui, invece di essere fra di loro paralleli, come vorrebbe la legge di Breithaupt, fanno fra loro, rispetto alla loro zona principale [001], un angolo di 4°,20', e con una delle tre zone principali dell'ematite $\}[\bar{2}11]\{$ un angolo di 2°,10' ciascuno.

Posteriori osservazioni di Baumhauer [1] confermarono questa deviazione di $\varepsilon = 2°,10'$: cosicchè i cristalli di rutilo invece di essere distribuiti in tre direzioni principali di 120°, si trovano in 6 direzioni secondarie, due a due delle quali fanno 2°,10' rispettivamente con le tre zone principali $[\bar{2}11]$, $[1\bar{2}1]$, e $[11\bar{2}]$ dell'ematite.

Avendo avuto a mia disposizione il bel campione di ematite con sopra numerosi cristallini di rutilo della collezione Guidotti appartenente al Museo della R. Università di Parma, mi sono proposto di intraprendere alcune misure per verificare o confermare il risultato di Baumhauer, misure delle quali darò subito comunicazione.

Ma prima devo dire che visitai varie collezioni svizzere contenenti bellissimi esemplari del Tavetsch e di Cavradi (Caveradi), quali la collezione esistente nel convento di Disentis, la collezione privata e ricca di Pally pure a Disentis e il negozio di minerali di Tschamut.

Osservando i numerosi esemplari di ematite con cristalli di rutilo di queste collezioni, si rimane grandemente sorpresi come gli osservatori e naturalisti eminenti, prima di Baumhauer, non abbiano riconosciuto che la legge di Breithaupt non è quasi mai verificata; che anzi, in quella vece, si nota distintamente non solo con la lente, ma persino a occhio nudo, la divergenza fra due e due cristallini di rutilo vicini fra loro.

Ed ora esponiamo i risultati dell'osservazione. I cristallini di rutilo che ho sottoposto a misura, si trovano segnati con i N$^{i}$. 1, 2, 3, 4, 5 e 6 nella fig. 1, la quale dà, come si è veduto [2], l'immagine abbastanza fedele del cristallo di ematite della collezione Guidotti.

Il goniometro essendo a due cerchî (goniometro Goldschmidt), fu disposto il cristallo di ematite in guisa che la base di esso (*111*), ovvero la faccia (100) dei cristalli di rutilo, fosse faccia polare dell'istrumento. Così facendo, si ottiene che gli angoli orari dànno direttamente la posizione dei cristalli di rutilo per rispetto alle zone principali dell'ematite, essendo (100) di quello sovrapposte a (*111*) di questo, come osservò già Breithaupt e ha confermato

[1] H. Baumhauer, *Ueber das Gesetz der regelmässigen Verwachsung von Rutil und Eisenglanz*. Zeitsch. f. Krystall., *43*, 61.

[2] C. Viola, *Sopra un campione di ematite con rutilo di provenienza dubbia*. R. Accad. dei Lincei, Rendiconti 1908, II, pag. 437.

di recente Baumhauer. Ecco ora le misure ordinate secondo la posizione delle faccie dell'isosceloedro ($\bar{1}31$).

### Cristallo di rutilo N° 1.

| | angolo orario | differenza |
|---|---|---|
| Ematite ($13\bar{1}$) . | 360°,0′ | — |
| Rutilo (111) . | 360°,36 | $0°,36' = \varepsilon_1$ |
| » ($1\bar{1}1$) . | 295°,07 | $64°,53' = \varepsilon_2 + 60°$ |

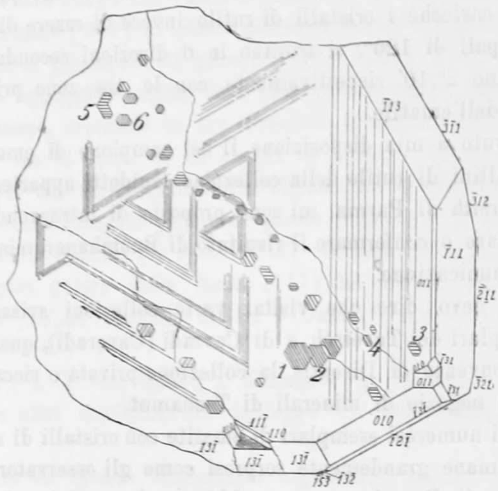

Fig. 1.

### Cristallo di rutilo N° 2.

| | | |
|---|---|---|
| Ematite ($\bar{1}31$) . | 300°,0′ | — |
| Rutilo ($1\bar{1}1$) . | 299°,36 | $0°,24' = \varepsilon_1$ |
| » (111) . | 364°,52 | $64°,52' = \varepsilon_2 + 60°$ |

### Cristallo di rutilo N° 3.

| | | |
|---|---|---|
| Ematite ($\bar{1}13$) . . . . . | 240°,0′ | — |
| Rutilo ($1\bar{1}1$) . . . . . | 239°,38 | $0°,22' = \varepsilon_1$ |
| » (111) . . . . . | 304°,48 | $64°,48' = \varepsilon_2 + 60°$ |

### Cristallo di rutilo N° 4.

| | | |
|---|---|---|
| Ematite ($131$) . . . . . | 360°,0′ | |
| Rutilo (111) . . . . . | 360°,20 | $0°,20 = \varepsilon_1$ |
| » ($1\bar{1}1$) . . . . . | 295°,03 | $64°,57' = \varepsilon_2 + 60°$ |

Cristallo di rutilo N° 5.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ematite $(3\bar{1}\bar{1})$ | . . . . . | 60° | — |
| Rutilo (111) | . . . . . | 59°,30 | $0°,30' = \varepsilon_1$ |
| „ $(11\bar{1})$ | . . . . . | 124°,36 | $64°,36 = \varepsilon_2 + 60°$ |

Cristallo di rutilo N° 6.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ematite $(\bar{1}\bar{1}3)$ | . . . . . | 240°,0′ | — |
| Rutilo $(1\bar{1}\bar{1})$ | . . . . . | 178°,45 | $61°,15' = \varepsilon_1 + 60°$ |
| „ (111) | . . . . . | 244°,45 | $4°,45 = \varepsilon_2$ |

Riassumendo, si ha il seguente quadro:

| | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ | $\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ |
|---|---|---|---|
| | ° ′ | ° ′ | ° ′ |
| Cristallo di rutilo N° 1 . . . . | 0,36 | 4,53 | 2,08 $\frac{1}{2}$ |
| „ „ „ 2 . . . . | 0,24 | 4,52 | 2,14 |
| „ „ „ 3 . . . . | 0,22 | 4,48 | 2,26 |
| „ „ „ 4 . . . . | 0.20 | 4,57 | 2,18 $\frac{1}{2}$ |
| „ „ „ 5 . . . . | 0,30 | 4,36 | 2,03 |
| „ „ „ 6 . . . . | 1,15 | 4,45 | 1,15 |

Le medie degli angoli fra i primi cinque cristalli sono:

$$\varepsilon_1 = 0°.26' \tfrac{2}{5} \quad , \quad \varepsilon_2 = 4°,49' \tfrac{1}{2}$$

$$\varepsilon = 2°,14' ;$$

e tenendo conto di tutti e sei i cristalli:

$$\varepsilon_1 = 0°,34' \tfrac{1}{2} \quad , \quad \varepsilon_2 = 4°,48' \tfrac{2}{3}$$

$$\varepsilon = 2°,04' \tfrac{1}{6} .$$

Le osservazioni dànno dunque una deviazione media $\varepsilon$, la quale varia da $2°,14'$ a $2°,04' \frac{1}{6}$, secondo che si prendano in considerazione 5 ovvero 6 cristalli. Questa è una deviazione che si avvicina a quella data da Baumhauer. Bisogna notare che Baumhauer usò nelle misure una singolare precisione, poichè disponeva di un materiale che ad essa si prestava più di quanto si può prestare l'esemplare del museo di Parma. E io per questo voglio concedere che, calcolando in qualche esemplare la media sopra un numero maggiore di cristalli, la deviazione risulti di $2°,10'$, come concluse Baumhauer.

Ma io devo qui inserire una considerazione. Calcolando la media aritmetica da più osservazioni, si suppone naturalmente che le singole posizioni dei cristalli di rutilo siano affette da errori imprevedibili, che portano fuori i cristalli da una posizione costante, ora più ora meno, ora positivamente e ora negativamente. Noi esamineremo in seguito se convenga ammettere che esista questa posizione costante fra ematite e rutilo, seguendo una determinata legge, come è opinione di Baumhauer.

Questi calcolò quale sarebbe la deviazione $\varepsilon$ del rutilo pel caso che una faccia della sua bipiramide tetragonale inversa $\}041\{$ coincidesse con una faccia del prisma disagonale $\}2\bar{5}3\{$ dell'ematite, e trovò che la detta deviazione importa $2^\circ,11',36''$; infatti gli angoli citati da Baumhauer sono i seguenti:

$$\begin{array}{lr} \text{Ematite } (2\bar{5}3):(0\bar{1}1) & = 23^\circ,24',48'' \\ \text{Rutilo } \quad (041):(010) & = \underline{21^\circ,13',12''} \\ \text{Differenza} & = \;\; 2^\circ,11',36'' \end{array}$$

Si presentava perciò ovvia l'ipotesi di Baumhauer che l'associazione del rutilo con l'ematite segua una legge costante, data dalla sovrapposizione della faccia (041) del rutilo con la faccia $(2\bar{5}3)$ dell'ematite.

Ma le obbiezioni da sollevarsi a questo riguardo possono essere diverse e di qualche peso. In primo luogo, la deviazione $\varepsilon$ del rutilo rispetto alla posizione regolare supposta da Breithaupt non è costante, ma è spesso minore di $2^\circ,11',36''$, e talvolta è anche maggiore. In secondo luogo si può osservare che la forma $\}041\{$ del rutilo è rarissima, come è ancora rarissima la forma $\}2\bar{5}3\{$ dell'ematite; si può poi altresì osservare che se nell'associazione dei due cristalli le faccie delle due forme poco probabili $\}041\{$ e $\}2\bar{5}3\{$ vengono a sovrapporsi, in tutto o in parte, questo deve essere un fenomeno possibile certamente, ma raro e perciò di poca importanza.

Guidato da queste considerazioni, mi sono proposto di esaminare se la deviazione $\varepsilon$ che presentano i cristalli di rutilo rispetto alle zone principali dell'ematite non possa trovare un'altra spiegazione e più plausibile di quella data da Baumhauer.

A questo fine, consideriamo i seguenti tre angoli tra le faccie più probabili dell'ematite e del rutilo:

$$\begin{aligned} (101):(100) &= \varphi\,, \\ (111):(3\bar{1}\bar{1}) &= \varphi_1\,, \\ (1\bar{1}1):(31\bar{1}) &= \varphi_2\,; \end{aligned}$$

i quali angoli sono piccoli e press'a poco dello stesso ordine degli angoli $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ e della deviazione $\varepsilon$ (vedi fig. 2).

I detti tre angoli sono conosciuti, quando siano dati la deviazione $\varepsilon$ e le costanti $(101):(100)=\varrho$, $(111):(100)\;\varrho'$ del rutilo; $(100):(111)=\varrho_1$, $(3\bar{1}\bar{1}):(111)=\varrho_1'$ dell'ematite.

Infatti si ha:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos\varrho\cos\varrho_1 + \operatorname{sen}\varrho\operatorname{sen}\varrho_1\cos\varepsilon. \\ \cos\varphi_1 &= \cos\varrho'\cos\varrho_1' + \operatorname{sen}\varrho'\operatorname{sen}\varrho_1'\cos\varepsilon_1\,, \\ \cos\varphi_2 &= \cos\varrho'\cos\varrho_1' + \operatorname{sen}\varrho'\operatorname{sen}\varrho_1'\cos\varepsilon_2\,. \end{aligned}\right.$$

Il problema che ora ci proponiamo di risolvere, è il seguente: quale deve essere la deviazione $\varepsilon$ affinchè la somma $\varphi + \varphi_1$ sia minima? Esso si riduce a grande semplicità calcolando le derivate di $\varphi$ e di $\varphi_1$ rispetto alla variabile $\varepsilon$, osservando che $d\varepsilon = - d\varepsilon_1$. Applicando questo calcolo, le due prime equazioni (1) dànno:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sen} \varphi \cdot \frac{d\varphi}{d\varepsilon} = \operatorname{sen} \varrho \,.\, \operatorname{sen} \varrho_1 \,.\, \operatorname{sen} \varepsilon \,, \\ &\operatorname{sen} \varphi_1 \, \frac{d\varphi_1}{d\varepsilon} = - \operatorname{sen} \varrho' \,.\, \operatorname{sen} \varrho_1' \,.\, \operatorname{sen} \varepsilon_1 \,. \end{aligned} \right.$$

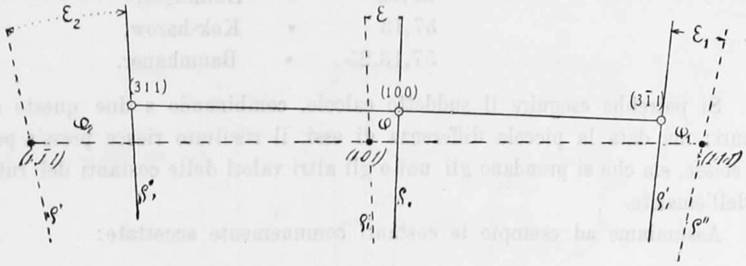


Fig. 2.

La somma $\varphi + \varphi_1$ è minima quando è

$$(3) \qquad \frac{d}{d\varepsilon} (\varphi + \varphi_1) = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{d\varphi}{d\varepsilon} = \frac{d\varphi_1}{d\varepsilon_1} \,;$$

il che porta alla seguente condizione del minimo:

$$(4) \qquad \frac{\operatorname{sen} \varrho}{\operatorname{sen} \varrho_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon_1} = \frac{\operatorname{sen} \varrho_1'}{\operatorname{sen} \varrho_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi_1} \,.$$

La risoluzione per via diretta di questa equazione è oltremodo laboriosa; essa è invece rapidissima per via indiretta; scegliendo la quale, portiamo le due prime equazioni (1), a scopo della maggiore esattezza dei piccoli angoli, sotto la forma:

$$(1)^a \qquad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\varrho - \varrho_1}{2} \right) + \operatorname{sen} \varrho \operatorname{sen} \varrho_1 \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2} \,, \\ &\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_1}{2} = \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\varrho_1 - \varrho_1'}{2} \right) + \operatorname{sen} \varrho' \operatorname{sen} \varrho_1' \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon_1}{2} \,, \end{aligned} \right.$$

e calcoliamo $\varphi$ e $\varphi_1$ per varî valori di $\varepsilon$ di 5 in 5 minuti primi.

Ma prima d'ogni cosa, dobbiamo metterci d'accordo circa le costanti da assegnarsi al rutilo e all'ematite. Per l'ematite, la costante cristallografica è stata riferita così:

$$\varrho_1 = (111):(100) = 57^\circ,30' \text{ secondo Miller e Strüver,}$$
$$57,38 \text{ » Haidinger,}$$
$$57,37 \text{ » Koksharow,}$$
$$57,29,40 \text{ » Dufrenoy;}$$

per il rutilo:

$$\varrho = (100):(101) = 57^\circ,12',44'' \text{ secondo Miller,}$$
$$57,32 \text{ » Haidinger,}$$
$$57,13 \text{ » Koksharow,}$$
$$57,13,25 \text{ » Baumhauer.}$$

Si potrebbe eseguire il suddetto calcolo, combinando a due queste costanti; ma data la piccola differenza di essi, il risultato riesce press'a poco lo stesso, sia che si prendano gli uni o gli altri valori delle costanti del rutilo o dell'ematite.

Assumiamo ad esempio le costanti comunemente accettate:

$$\varrho_1 = 57^\circ,37' \text{ per l'ematite}$$

e

$$\varrho = 57^\circ,13' \text{ per il rulilo,}$$

con le quali si calcola facilmente:

$$\varrho'_1 = 61^\circ,31',21'' \text{ per l'ematite}$$

e

$$\varrho' = 61^\circ,33',58'' \text{ per il rutilo.}$$

E ora esponiamo qui appresso i valori di $\varphi$, $\varphi_1$ e $\varphi + \varphi_1$ per i diversi valori di $\varepsilon$ calcolati con la formola (1ª).

| $\varepsilon$ | $\varepsilon_1$ | $\varphi$ | $\varphi_1$ | $\varphi + \varphi_1$ | $8\varphi + 9\varphi_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1°,30′ | 1°,17′ | 1°,19′,34″ | 1°,10′,40″ | 2°,30′,14″ | 21°,12′,32″ |
| 1,35 | 1,12 | 1,23,34 | 1,06,28 | 2,30,02 | 21,06,44 |
| 1,40 | 1,07 | 1,27,36 | 1,02,20 | 2,29,56 | 21,01,48 |
| 1,45 | 1,02 | 1,31,40 | 0,58,13 | 2,29,53 | 20,57,17 |
| 1,50 | 0,57 | 1,35,44 | 0,54,08 | *2,29,52* | 20,53,04 |
| 1,55 | 0,52 | 1,39,50 | 0,50,06 | 2,29,56 | 20,49,34 |
| 2,00 | 0,47 | 1,43,56 | 0,46,08 | 2,30,04 | 20,46,40 |
| 2,05 | 0,42 | 1,48,02 | 0,42,14 | 2,30,16 | 20,44,22 |
| 2,10 | 0,37 | 1,52,08 | 0,38,28 | 2,30,36 | 20,43,16 |
| 2,15 | 0,32 | 1,56,16 | 0,34,50 | 2,31,06 | *20,34,38* |
| 2,20 | 0,27 | 2,00,22 | 0,31,24 | 2,31,46 | 20.44,22 |

La conclusione che si può tirare da questi risultati, è che esiste un minimo di $\varphi + \varphi_1$, che esso è di $2°,29',52''$ ed avviene per una deviazione $\varepsilon$ del rutilo rispetto a una direzione principale dell'ematite, che importa $1°,50'$.

Ed in conseguenza, se la deviazione principale dei cristalli di rutilo e le direzioni principali dell'ematite fosse effettivamente di $1°,50'$, si potrebbe fondare l'ipotesi che *l'associazione regolare fra rutilo ed ematite avviene in guisa che la somma degli angoli tra faccie più sviluppate e più probabili dell'uno e dell'altro cristallo è minima.*

L'osservazione dimostra infatti che la deviazione avviene dalla parte ove le faccie corrispondenti di $\}111\{$ del rutilo sono più sviluppate. A questo proposito

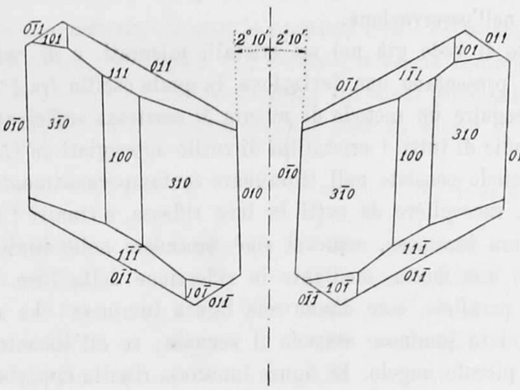


FIG. 3.

serva la fig. 3, ove sono effigiati due cristalli di rutilo deviati di $2°,10$, l'uno a destra, l'altro a sinistra dalla direzione principale dell'ematite. In quello a destra figurano sviluppate due sole faccie della bipiramide unitaria $\}111\{$, cioè $(1\bar{1}1)$ e $(11\bar{1})$; in quello a sinistra, all'opposto, figurano sviluppate le faccie $(111)$ e $(1\bar{1}\bar{1})$. Ambidue i cristalli hanno oltre di ciò la forma $\}101\{$.

Se la deviazione dei cristalli di rutilo dalla loro posizione regolare dovesse avere luogo seguendo la legge del minimo della somma degli angoli tra faccie più sviluppate, la deviazione stessa sarebbe o dovrebbe essere di $2°,47'$ $(90 - 57°,13')$, ove mancassero le faccie $\}101\{$ e fosse sviluppata unicamente la metà di $\}111\{$, poichè il minimo riguarderebbe solamente l'angolo $\varphi_1$. Se all'incontro fossero sviluppate uniformemente tutte le faccie della bipiramide $\}111\{$, il minimo riguarderebbe la somma $\varphi + \varphi_1 + \varphi_2$ di tre angoli, già sopra considerati, cioè $\varphi$ tra $(101)$ del rutilo e *(100)* dell'ematite e i due angoli $\varphi_1$ e $\varphi_2$ fra $(111)$ e $(1\bar{1}1)$ del rutilo, e rispettivamente *($3\bar{1}1$)* e *($31\bar{1}$)* dell'ematite (vedi fig. 2), e questo minimo avrebbe luogo naturalmente per una deviazione di $\varepsilon = 0°$. Se poi la faccia $(1\bar{1}1)$ del rutilo fosse soppressa, e l'estensione della faccia (101) stesse all'estensione della faccia (111) del rutilo come 8 : 9, il minimo della somma $8\varphi + 9\varphi_1$ avrebbe luogo per una deviazione $\varepsilon = 2°,15'$ (vedi quadro a pag. 000).

In conclusione dunque, tutte le deviazioni fra 0° e 2°,47' dovrebbero essere possibili, ove effettivamente l'associazione avvenisse seguendo il principio della minima somma degli angoli, poichè tutti gli sviluppi delle faccie nelle forme suddette, possono presentarsi entro certi limiti.

Le osservazioni ci diranno se la deviazione $\varepsilon$ è costante o variabile nei limiti su riferiti, e quindi se la supposta ipotesi sia ammissibile e, rispettivamente, che probabilità essa abbia. A tal fine serve ancora molto bene l'esemplare di ematite del museo di Parma, sulla cui base *(111)* sono impiantati centinaia di cristallini di rutilo. Si tratta qui soltanto di assumerli possibilmente tutti nell'osservazione.

Ma intanto si vede già nei sei cristalli misurati, e di cui si è parlato sopra, che essi presentano una deviazione, la quale oscilla fra 1°,15' e 2°,26'. Noi possiamo seguire un metodo di misura di esattezza sufficiente, che ci dia le posizioni medie di tutti i cristallini di rutilo appoggiati su *(111)* dell'ematite. Questo metodo consiste nell'illuminare contemporaneamente tutti i cristalli di rutilo, raccogliere da tutti la luce riflessa, e riunire i riflessi vicini in un'unica figura luminosa, come si suol procedere nello studio delle figure di corrosione di una faccia, mediante la riflessione della luce. Se le faccie riflettenti sono parallele, esse dànno una figura luminosa che si avvicina a un punto, un punto luminoso essendo il segnale; se all'incontro esse fanno fra di loro un piccolo angolo, la figura luminosa riunita apparisce allungata, e il suo centro può dare la deviazione media di un certo numero di faccie.

Avendo in questo modo operato, nel quadro seguente sono esposti gli angoli orarî dei riflessi prodotti dalla faccie }111{ dei cristallini di rutilo, le quali capitano in vicinanza delle rispettive faccie appartenenti all'isosceloedro }$3\bar{1}\bar{1}${ dell'ematite. Fatte le debite compensazioni, eccone i risultati:

| | | angoli orari | differenza |
|---|---|---|---|
| Ematite *($\bar{1}\bar{1}3$)* . . . . . . | | 360°,0' | — |
| Rutilo (111) . . . . . . | 1 | 355°,11' | $4°,49' = \varepsilon_2$ |
| | 2 | 358°,49' | $1°,11' = \varepsilon_1$ |
| | 3 | 364°,14' | $4°,14' = \varepsilon_2$ |
| Ematite *($1\bar{1}3$)* . . . . . . | | 60°,0' | — |
| Rutilo (111) . . . . . . | 1 | 54°,20' | $5°,40' = \varepsilon_2$ |
| | 2 | 60°,41' | $0°,41' = \varepsilon_1$ |
| | 3 | 64°,17' | $4°,17' = \varepsilon_2$ |
| Ematite *($3\bar{1}\bar{1}$)* . . . . . . | | 120°,0' | — |
| Rutilo (111) . . . . . . | 1 | 115°,16' | $4°,44' = \varepsilon_2$ |
| | 2 | 119°,02' | $0°,58' = \varepsilon_1$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ematite $(31\bar{1})$ . . . . . . | | 180°,0′ | — |
| Rutilo (111) . . . . . | 1 | 174°,52′ | 5°,08′ $= \varepsilon_2$ |
| | 2 | 179°,05′ | 0°,55′ $= \varepsilon_1$ |
| | 3 | 183°,48′ | 3°,48′ $= \varepsilon_2$ |
| Ematite $(13\bar{1})$ . . . . . . | | 240°,0′ | — |
| Rutilo (111) . . . . . | 1 | 244°,24′ | 4°,24′ $= \varepsilon_2$ |
| | 2 | 239°,40′ | 0°,20′ $= \varepsilon_1$ |
| Ematite $(\bar{1}31)$ . . . . . . | | 300°,0′ | — |
| Rutilo (111) . . . . . | 1 | 304°,34′ | 4°,34′ $= \varepsilon_2$ |
| | 2 | 298°,50′ | 1°,10′ $= \varepsilon_1$. |

Per avere da questi angoli orarî le posizioni medie dei cristalli di rutilo per rispetto alle direzioni principali dell'ematite, dovremo combinare fra di loro i riflessi che si trovano in vicinanza delle direzioni principali dell'ematite a distanza angolare di 60°. Le combinazioni possono essere le seguenti:

| | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ | $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ | $\varepsilon = {}^1/_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\bar{1}13)$ e $(1\bar{1}3)$ ; | 0°,41′ | 4°,49′ | 5°,30′ | 2°,04′ |
| $(\bar{1}13)$ e $(1\bar{1}3)$ ; | 1,11 | 4,17 | 5,28 | 1,32 |
| $(1\bar{1}3)$ e $(3\bar{1}1)$ ; | 0,58 | 5,40 | 6,38 | 2,21 |
| $(31\bar{1})$ e $(13\bar{1})$ ; | 0,55 | 4,24 | 5,19 | 1,44 $^1/_2$ |
| $(13\bar{1})$ e $(\bar{1}31)$ ; | 0,20 | 4,34 | 4,54 | 2,07 |
| $(\bar{1}31)$ e $(\bar{1}13)$ ; | 1,10 | 4.14 | 5,24 | 1,32 |

Il metodo di osservazione qui adottato e reso indispensabile per tenere conto, in uno, di tutti i cristallini di rutilo disseminati sull'ematite, è fonte di errori; ma ciò malgrado, salta all'occhio che la deviazione $\varepsilon$ non è costante. Essa è varie volte minore, ed è talvolta maggiore di 2°,10′; oscilla fra 1°,37′ e 2°,21′, anzi fra 1°,15′ e 2°,26′ secondo le precedenti misure.

L'ipotesi che l'associazione fra rutilo ed ematite avvenga seguendo il minimo della somma degli angoli tra faccie più probabili e sviluppate dei due cristalli, prende effettivamente valore da questi dati di osservazione, poichè il luogo del minimo varia secondo varia lo sviluppo delle faccie dei due cristalli, tra le quali si misurano gli angoli $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$. Ed io credo che con una considerazione teorica, il fenomeno possa riuscire più evidente messo in confronto con l'ipotesi fatta.

Si consideri dapprima per semplicità una sola coppia di faccie $f$, $f_1$ (fig. 4), di due cristalli dati, facenti un piccolo angolo $\varphi$. Le due faccie sono bagnate da una soluzione. Il menisco che si formerà all'orlo delle due faccie dipende dalla costante di capillarità, dall'angolo $\varphi$ e dalle dimensioni delle faccie che chiameremo con S. Volendo aumentare la pellicola superficiale del menisco, bisognerà spendere un lavoro di capillarità per vincere la tensione superficiale; e questo lavoro è proporzionale al prodotto $S\,d\varphi$, essendo $d\varphi$ l'aumento elementare che subisce l'angolo $\varphi$, ed essendo questo piccolo.

Supposti i due cristalli in perfetta mobilità, e dato che fra essi esista la sola tensione superficiale, essi raggiungeranno la stato di equilibrio quando il detto lavoro elementare è nullo. Ciò vuol dire che la condizione di equilibrio è

$$d\varphi = 0,$$

ossia $\varphi = \min$. In questo semplice caso il minimo di $\varphi$ è zero. I due cri-

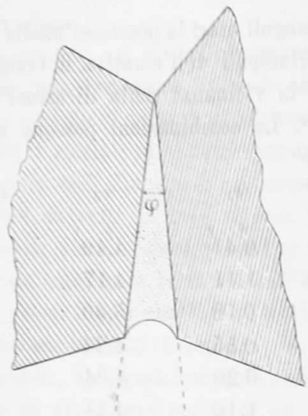


Fig. 4.

stalli, fra i quali esiste solamente la tensione superficiale, si trovano in equilibrio quando le due faccie $f$ e $f_1$ si sovrappongono.

Analogo risultato si ottiene quando più coppie di faccie di due cristalli sono sottoposte alle forze capillari. Siano $n$ le coppie di faccie di dimensioni $S_1, S_2, \ldots S_n$, fra le quali esistano piccoli angoli che chiameremo con $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$. Un movimento elementare $d\varepsilon$ di un cristallo rispetto all'altro farà aumentare o rispettivamente diminuire di quantità infinitesime, quali $d\varphi_1, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n$, gli angoli dati.

Supposto i due cristalli siano in perfetta mobilità, e che tra essi non si abbiano altre forze che capillari, il lavoro superficiale necessario per produrre il movimento $d\varepsilon$ sarà proporzionale alla somma:

$$dL = S_1\,d\varphi_1 + S_2\,d\varphi_2 + \ldots S_n\,d\varphi_n$$

salvo una costante. E questo lavoro elementare è nullo pel caso di equilibrio fra le forze capillari:

$$dL = 0 .$$

La condizione dell'equilibrio fra i due cristalli è dunque:

$$S_1 \varphi_1 + S_2 \varphi_2 + \ldots + S_n \varphi_n = \text{Min.}$$

Questa considerazione è applicabile al caso concreto fra rutilo ed ematite con (100) dell'uno sovrapposta a (*111*) dell'altra.

Siano $S_1$, $S_2$, S le dimensioni rispettive delle faccie (111), $(1\bar{1}1)$ e (101) del cristallo di rutilo, le quali si trovino in vicinanza delle rispettive faccie $(3\bar{1}\bar{1})$, $(31\bar{1})$ e (*100*) dell'ematite. I due cristalli, fra le cui faccie si suppone esistano solamente forze capillari, ammetteranno una posizione relativa tale, che ci sia lo stato di equilibrio fra le dette tensioni superficiali, e questa condizione di equilibrio è appunto

$$S\varphi + S_1 \varphi_1 + S_2 \varphi_2 = \text{Min.}$$

Si potrebbero ora considerare i diversi casi possibili. Mancandovi la faccia $(1\bar{1}1)$ del rutilo, ossia $S_2 = 0$, la condizione d'equilibrio si riduce a

$$S\varphi + S_1 \varphi_1 = \text{Min.}$$

Per $S = S_1$, è $\varphi + \varphi_1 = \text{Min.}$ $\varepsilon = 1°,50'$;
per $S = 8$, $S_1 = 9$, è $8\varphi + 9\varphi_1 = \text{Min.}$ $\varepsilon = 2°,15'$;

e così via.

Riassumendo le considerazioni teoriche fatte e i dati di osservazione, potremo così concludere:

La deviazione fra direzione principale del rutilo e direzione principale dell'ematite non è costante, ma varia in limiti larghi secondo lo sviluppo delle faccie }111{ del rutilo; la condizione di equilibrio tra le forze capillari varia anch'essa in limiti larghi secondo lo sviluppo di }111{ del rutilo, e ha luogo per una deviazione che può essere da 0° a 2°,47'.

Le osservazioni e la ipotesi sono quindi abbastanza concordanti; in ogni modo, quelle sono tutte comprese in questa. Una sola obbiezione è lecita, che i cristalli di rutilo appoggiati sull'ematite presentano talvolta deviazioni poco diverse, e, nel caso osservato da Baumhauer, di 2°,10'. Ma questa obbiezione non è molto seria, poichè è noto che l'abito dei cristalli formatisi in eguali condizioni si mantiene quasi sempre costante; costante può quindi essere la deviazione $\varepsilon$.