ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

curve della disimbibizione s'abbassano piuttosto lentamente, pur essendo parallele; la curva di riimbibizione (di una delle lenti) monta invece rapidamente, come quelle della lente normale immersa in acqua distillata. (Sospen-

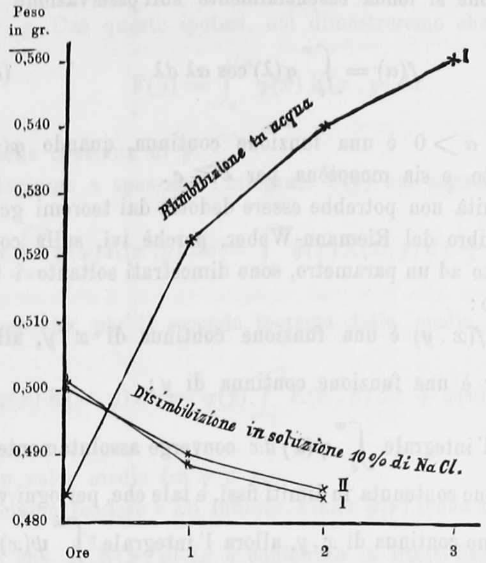

FIG. 6.

demmo l'altra lente nello spazio chiuso, saturo di vapor d'acqua: strano a dirsi, essa continuò a diminuire di peso, cioè a cedere acqua all'ambiente!).

In questi esperimenti, però, processi di osmosi si svolgono insieme coi processi di imbibizione e disimbibizione, e quindi l'effetto che si ottiene è complesso. Ma di ciò tratteremo diffusamente più tardi.

Matematica. — *Sulla continuità di un integrale rispetto ad un parametro*. Nota della dott.ssa P. QUINTILI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Il sig. Pringsheim, in una Nota sulla formula integrale di Fourier (1), osserva che le condizioni per la validità di questa formula, poste nell'opera di Riemann-Weber (2) sulle equazioni alle derivate parziali della fisica matematica, sono insufficienti, se stiamo alla dimostrazione contenuta in tale libro; ma contemporaneamente egli afferma che esse sono sufficientissime quando la dimostrazione si conduca in altro modo.

(1) *Ueber das Fouriersche Integraltheorem*. Jahresbericht der deutschen Math-Vereinigung. Bd. XVI, H. 1 (gennaio 1907).

(2) *Die partiellen Diff-gleichungen der mathem. Physik*. Bd. I, § 17.

In una recente Nota di L. Orlando [1] sono, infatti, stabilite le basi della formula integrale di Fourier, con condizioni meno restrittive di quelle imposte nell'opera su citata.

La dimostrazione si fonda essenzialmente sull'osservazione che l'integrale

$$f(\alpha) = \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda \qquad (c > 0)$$

per ogni valore di $\alpha > 0$ è una funzione continua, quando $\varphi(\lambda)$ tenda a zero per λ infinito, e sia monotòna per $\lambda \geqq c$.

Questa continuità non potrebbe essere dedotta dai teoremi generali contenuti nell'ottimo libro del Riemann-Weber, perchè ivi, sulla continuità di un integrale rispetto ad un parametro, sono dimostrati soltanto i tre teoremi che ora enunceremo:

1°) quando $f(x, y)$ è una funzione continua di x, y, allora l'integrale $\int_a^b f(x, y)\, dx$ è una funzione continua di y;

2°) quando l'integrale $\int_c^\infty \psi(x)\, dx$ converge assolutamente, e quando $\varphi(x, y)$ è una funzione contenuta in limiti fissi, e tale che, per ogni valore finito di x, sia una funzione continua di x, y, allora l'integrale $\int_c^\infty \psi(x)\, \varphi(x, y)\, dx$ è una funzione continua di y;

3°) quando $\int_c^\infty \varphi(x)\, dx$ converge, ed è $\psi(x)$ una funzione che tende a zero per x infinito ed è monotòna per $x \geqq c$, allora, se α tende a zero per valori positivi, sarà

$$\lim_{\alpha=0} \int_c^\infty \varphi(x)\, \psi(\alpha x)\, dx = \psi(0) \int_c^\infty \varphi(x)\, dx .$$

Nessuno di questi teoremi può permetterci di decidere se $f(\alpha)$ sia o no una funzione continua, per ogni valore di $\alpha > 0$.

Per questa considerazione, non crediamo che sia inopportuno aggiungere, come complemento a questi tre teoremi dimostrati nel Riemann-Weber, la seguente proposizione:

A) Supponiamo che $\varphi(x)$ sia una funzione limitata, monotòna per ogni valore di $x \geqq c$, e che essa tenda a zero per x infinito; supponiamo inoltre che, per ogni valore di h abbastanza vicino a zero, si possa scrivere

$$|K(x, y+h) + K(x, y)| < \omega ,$$

[1] *Sulla formula integrale di Fourier*. Rend. della R. Accademia dei Lincei. Vol. XVII, fasc. 6° e 8° (2° sem. 1908).

dove ω è un numero positivo, indipendente da x e da y, fissato ad arbitrio; sia inoltre, per ogni coppia di valori p e q, non inferiori a c, l'integrale $\int_p^q \mathrm{K}(x, y)\, dx$ contenuto in limiti fissi, indipendenti da x e da y, e anche da p, q. Con queste ipotesi, noi dimostreremo che l'integrale

$$\mathrm{F}(y) = \int_c^\infty \varphi(x)\, \mathrm{K}(x, y)\, dx$$

è una funzione continua di y.

Incominciamo a spezzare l'integrale $\mathrm{F}(y)$ nel seguente modo:

$$(1)\quad \mathrm{F}(y) = \int_c^\infty \varphi(x)\, \mathrm{K}(x, y)\, dx = \int_c^\gamma \varphi(x)\, \mathrm{K}(x, y)\, dx + \int_\gamma^\infty \varphi(x)\, \mathrm{K}(x, y)\, dx$$

ed osserviamo che, per il secondo teorema della media, possiamo scrivere:

$$(2)\qquad \int_\gamma^\nu \varphi(x)\, \mathrm{K}(x, y)\, dx = \varphi(\gamma) \int_\gamma^\xi \mathrm{K}(x, y)\, dx + \varphi(\nu) \int_\xi^\nu \mathrm{K}(x, y)\, dx$$

dove ξ è un valor medio fra γ e ν.

Se facciamo tendere ν all'infinito, allora $\varphi(\nu)$ tende a zero; ma abbiamo anche detto che $\int_p^q \mathrm{K}(x, y)\, dx$ è contenuto in limiti fissi: dunque è chiaro che esiste un numero positivo fisso M, maggiore del valore assoluto di questo integrale.

Queste osservazioni ci permettono di stabilire la formula:

$$\left| \int_\gamma^\infty \varphi(x)\, \mathrm{K}(x, y)\, dx \right| < |\varphi(x)|\, \mathrm{M}.$$

Se γ è fissato abbastanza grande, allora si può asserire che, per ogni valore di y, è $\varphi(\gamma)$ minore di $\frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}}$, dove ε è un numero positivo fissato ad arbitrio; dunque sarà, evidentemente,

$$(3)\qquad \left| \int_\gamma^\infty \varphi(x)\, \mathrm{K}(x, y+h)\, dx - \int_\gamma^\infty \varphi(x)\, \mathrm{K}(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo ora l'altro integrale $\int_c^\gamma \varphi(x)\, \mathrm{K}(x, y)\, dx$, che figura nella formula (1). Esso è una funzione continua di y; infatti, abbiamo posto la condizione che, per h abbastanza vicino a zero, si possa scrivere

$$|\mathrm{K}(x, y+h) - \mathrm{K}(x, y)| < \omega;$$

quindi possiamo determinare ω in modo che sia

$$\omega < \frac{\varepsilon}{2M \int_c^\gamma |\varphi(x)|\, dx}.$$

Questo ci permette, evidentemente, di scrivere, insieme con la (3), anche la formula:

$$\left| \int_c^\gamma \varphi(x) \,\mathrm{K}(x\,, y+h)\, dx - \int_c^\gamma \varphi(x)\,\mathrm{K}(x\,,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e di dedurre subito l'altra

$$\left| \int_c^\infty \varphi(x) \,\mathrm{K}(x\,, y+h)\, dx - \int_c^\infty \varphi(x)\,\mathrm{K}(x\,,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Questa inuguaglianza, che vale per ogni valore di h abbastanza vicino a zero, dimostra la continuità dell'integrale $\mathrm{F}(y) = \int_c^\infty \varphi(x)\,\mathrm{K}(x\,,y)\,dx$ rispetto alla variabile y.

Dal teorema che abbiamo ora dimostrato risulta subito la continuità di $\mathrm{F}(\alpha) = \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda$, per ogni valore di α maggiore di zero.

Risulta anche la continuità dell'integrale $\mathrm{F}(\alpha) = \int_c^\infty \frac{\mathrm{J}(\alpha\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda$ per ogni valore di α; quest'integrale ha, come l'altro, importanza nell'inversione di alcuni integrali definiti.

Dalla dimostrazione che abbiamo data si vede che non è strettamente necessario supporre che $\varphi(x)$ sia sempre monotòna per ogni $x \geqq c$. Basterà che $\varphi(x)$ sia monotona per $x \geqq m$, dove m è un numero fisso $\geqq c$. Infatti, $\int_c^m$ è una funzione continua di y, per il teorema 1° che abbiamo richiamato dal Weber; all'integrale rimanente $\int_m^\infty$ applicheremo il criterio rappresentato da A).

Vogliamo accennare ad una conseguenza del teorema ora dimostrato. Sia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una successione monotòna avente il limite zero; e sia $u_1(y), u_2(y), u_3(y), \ldots$ una successione di infinite funzioni della variabile y, tali che $s_n(y) = u_1(y) + u_2(y) + \cdots + u_n(y)$ si mantenga sempre, per quanto cresca n, in limiti fissi, indipendenti da y.

Se noi assumiamo $\varphi(x) = a_1$ per $1 \leqq x < 2$, poi $\varphi(x) = a_2$ per $2 \leqq x < 3$, ecc.; e se assumiamo $\mathrm{K}(x\,,y) = u_1(y)$ per $1 \leqq x < 2$, poi $\mathrm{K}(x\,,y) = u_2(y)$ per $2 \leqq x < 3$, ecc.; allora possiamo senz'altro dire che la serie

$$a_1 u_1(y) + a_2 u_2(y) + a_3 u_3(y) + \cdots$$

rappresenta una funzione continua di y. Questo risultato si può anche, in modo semplice, stabilire direttamente.