ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2º Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

molecolare del selenio sciolto in iodio corrisponda alla molecola $Se_2 = 158{,}4$. Ora non soltanto il dubbio sussiste, ma può anche affermarsi che la conclusione dell'Olivari sia molto affrettata. Risulta infatti dalle ricerche di Bekmann [1] che il selenio in soluzione nel fosforo e nell'ioduro di metilene ha la molecola assai prossima ad Se_8.

Ora quando è noto che lo zolfo nei varî solventi ha, tranne che in soluzioni diluitissime, la molecola egualmente complessa S_8, e che perchè essa si dissoci in molecole S_2 è necessario portarne il vapore ad altissima temperatura, non è presumibile che ciò faccia il selenio alla temperatura di 113°, tanto inferiore a quella del suo punto di fusione. Una simile ipotesi per essere creduta deve essere altrimenti provata. Se non fosse per le esperienze di Pellini e Pedrina, i risultati dell'Olivari troverebbero facile spiegazione ammettendo la formazione del composto $Se_2 I_2$.

Matematica. — *La massima deviazione accidentale e le osservazioni del tenente Mazzuoli sui risultati dei tiri.* Nota del Corrispondente P. Pizzetti.

1. Il compianto tenente di vascello Alberto Mazzuoli, rimasto vittima, il dì 24 ottobre u. s., dello scoppio accidentale di una granata al Balipedio di Viareggio, mi aveva, nello scorso aprile, comunicati i risultati di numerose ricerche statistiche da lui eseguite sulle deviazioni accidentali nei tiri al cannone [2].

L'argomento di tali statistiche è il seguente: Sia X_n la deviazione massima (in una determinata direzione e in un dato piano verticale) di un tiro, rispetto alla media, in una serie di n tiri, e sia R_n il rapporto fra X_n e la così detta *deviazione probabile* (la cui definizione corrisponde a quella dell'errore probabile di Gauss). Il Mazzuoli osservava come dalle sue ricerche numeriche risultasse che questo R_n può considerarsi come una *quantità statistica fissa per ogni dato valore di n*. Inutile dire che colla locuzione *quantità statistica fissa* non s'intende significare che quel rapporto abbia ugual valore nelle differenti serie; vogliamo dire che, facendo la media dei valori di R_n per un certo numero m di serie, ciascuna composta di n tiri, si arriva ben presto a un numero fisso, al quale i risultati di quante si vogliano nuove serie analoghe non portano modificazione sensibile. Ma di

(1) Zeits. f. Phy. Chemie, t. XXII, p. 614, e t. XLVI, p. 853.

(2) Rendo grazie al Ministero della Marina che mi ha gentilmente concesso di esaminare i registri originali delle statistiche del Mazzuoli, e ai sigg. tenenti di vascello Bettioli e Bertagna, il primo comandante attuale del Balipedio, il secondo collaboratore del Mazzuoli nelle ricerche di cui qui si tratta, i quali, con somma cortesia, mi hanno fornito le spiegazioni di cui abbisognavo.

più questo rapporto R_n si manifesta, secondo le osservazioni del Mazzuoli, *variabile in modo molto regolare col variare del numero* n *dei tiri componenti la serie*.

Di un tale fenomeno regolare il Mazzuoli desiderava che io gli dessi una rappresentazione analitica, in base alla ordinaria teoria degli errori accidentali, che, come di solito, si ritiene potersi applicare ai risultati dei tiri. Di questa rappresentazione analitica è oggetto le seguente Nota, nella quale, com'è naturale, il problema trattato è *la ricerca del valor medio del rapporto fra il massimo errore e l'errore probabile in una serie di* n *osservazioni*. Ma con questo scritto, non tanto m'interessa il presentare una nuova formola, quanto offrire un esempio, che ritengo veramente notevole, di verificazione sperimentale della legge di probabilità degli errori, e con questo rendere un, per quanto lieve, tributo d'onore alla memoria del compianto ufficiale. Il quale, benchè giovane assai, aveva già resi eminenti servigi alla R. Marina, sia come insegnante nell'Accademia Navale, sia come direttore del Balipedio di Viareggio, sia nella Navigazione e nelle delicate funzioni amministrative. Aggiungerò che lo stesso tenente Mazzuoli aveva, nella Rivista Marittima del gennaio del corrente anno, data una interpretazione approssimata di altri risultati statistici, analoghi a quelli di cui qui si tratta, ma dedotti con principio un poco differente.

2. Sia x l'errore massimo (in valore assoluto) in una serie di n osservazioni di egual precisione, sia $P_x dx$ la probabilità che esso sia compreso fra x e $x + dx$. Rappresenterà

$$X_n = \int_0^\infty x\, P_x\, dx \tag{1}$$

il valore medio di x, ossia la media aritmetica dei valori che x assumerebbe in infinite serie, ciascuna di n osservazioni. Se ϱ è l'errore probabile, il rapporto $X_n : \varrho$ è il valore teorico del numero R_n dianzi considerato. Ora è facile vedere che, assunta la solita legge esponenziale per gli errori accidentali, e detta h la misura di precisione, la P_x è proporzionale a

$$e^{-h^2x^2}\left\{\int_0^x e^{-h^2t^2}\,dt\right\}^{n-1},$$

poichè, se x è l'errore massimo in una serie di n osservazioni, ve ne saranno $n-1$ inferiori ad x.

Posto

$$hx = z,$$

potremo dunque scrivere

$$P_x = H\, e^{-z^2}\, \varphi^{n-1} \qquad \left(\varphi = \int_0^z e^{-t^2}\,dt\right) \tag{2}$$

dove H è indipendente da z ed è determinata dalla condizione

$$\int_0^\infty \mathrm{P}_x\, dx = 1.$$

Con queste posizioni la (1) dà

$$\mathrm{X}_n = \frac{1}{h} \frac{\int_0^\infty z\, e^{-z^2} . \varphi^{n-1} . dz}{\int_0^\infty e^{-z^2} . \varphi^{n-1} . dz} . \tag{3}$$

Per avere R_n basterà poi dividere questo risultato per ϱ ed osservare che

$$\varrho h = 0{,}4769 \ldots$$

3. La integrazione indicata nel numeratore della formola (3) non ho saputo ottenere in termini finiti se non pel caso $n = 3$. Il risultato esatto, per questo caso, è dato nel paragrafo ultimo della presente Nota.

Per un qualunque valore di n, ho ricorso al metodo tenuto da Laplace in casi simili, dello sviluppare in serie di Taylor il logaritmo della funzione integranda, assumendo come valore iniziale quello che rende *massima* la probabilità.

Osservando che

$$\frac{d\varphi}{dz} = e^{-z^2},$$

dalla (2) deduciamo

$$\frac{d}{dz} \log \mathrm{P}_x = -2z + \frac{n-1}{\varphi} e^{-z^2}.$$

Il valore δ di z che rende massima la P_x è dunque fornito dall'equazione

$$2\delta \, . \, e^{\delta^2} \, \varphi(\delta) = n - 1 . \tag{4}$$

Si hanno, com'è noto, delle tabelle numeriche pel calcolo dell'espressione

$$\Theta(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt .$$

Introducendo questa nella (4), l'equazione diventa

$$\delta\, e^{\delta^2} \Theta(\delta) = \frac{n-1}{\sqrt{\pi}} , \tag{4'}$$

dalla quale non è difficile ricavare, coll'interpolazione, il valore di δ corrispondente a un dato valore di n. Per comodità degli eventuali riscontri, do qui i valori del prodotto

$$D = \delta \, . \, e^{\delta^2} \, . \, \Theta(\delta)$$

per differenti valori di δ

δ	D	δ	D	δ	D
0	0	1,05	2,7273	1,36	8,1752
0,5	0,3341	1,10	3,2469	1,37	8,4789
0,6	0,5193	1,15	3,8674	1,38	8,7947
0,7	0,7745	1,20	4,6105	1,39	9,1230
0,8	1,1259	1,25	5,5036	1,40	9,4648
0,9	1,6122	1,30	6,5804	1,41	9,8202
1,0	2,2907	1,35	7,8830	1,42	10,1902

Pongasi ora

$$z = \delta + u \quad \text{vale a dire} \quad x = \frac{\delta + u}{h}$$

e si sviluppi in serie $\log P_x$ per le potenze intere positive di u. Si otterrà, con calcoli che non presentano alcuna difficoltà, e nei quali naturalmente bisogna tener conto che δ soddisfà alla (4),

$$P_x = P_0 \, e^{-Au^2 + Bu^3 + \cdots} = P_0 (1 + Bu^3 + \cdots) \, e^{-Au^2}$$

dove P_0 è il valore di P_x corrispondente a $z = \delta$, e dove

$$A = 1 + \frac{n}{n-1} 2\delta^2$$

$$B = \frac{2\delta}{3} \left\{ \frac{n(n+1)}{(n-1)^2} 2\delta^2 - 1 \right\}.$$

Sostituendo questa espressione di P_x nella (1), gli integrali dovrebbero essere estesi da $-\delta$ a $+\infty$. Ma seguendo anche in ciò l'esempio dato da Laplace per simili casi, osserveremo che le funzioni integrande assumono valori estremamente piccoli per valori di u alquanto differenti da zero, epperò senza errore sensibile estenderemo le integrazioni da $-\infty$ a $+\infty$. Avremo così

$$X_n = \frac{P_0}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta + u)(1 + Bu^3) \, e^{-Au^2} \, du \tag{6}$$

dove P_0 è determinata dalla condizione

$$\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} P_x \, du = 1$$

ossia

$$\frac{P_0}{h}\int_{-\infty}^{\infty}(1+Bu^3)\,e^{-Au^2}\,du=1$$

donde

$$P_0=h\sqrt{\frac{A}{\pi}}\,.$$

Si ha poi

$$\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-Au^2}\,du=0\quad,\quad\int_{-\infty}^{\infty}u^4e^{-Au^2}\,du=\frac{3\sqrt{\pi}}{4A^{5/2}}\,.$$

Con queste avvertenze si ha senza difficoltà dalla (6)

$$X_n=\frac{\delta}{h}+\frac{3B}{4A^2h}\,.$$

Introducendo le espressioni sopra indicate per A e B, dividendo per ϱ ed osservando che $\varrho h=0{,}4769$ abbiamo finalmente il rapporto cercato

$$\text{(7)}\qquad R_n=\frac{\delta}{0{,}4769}\left\{1+\frac{\frac{n(n+1)}{(n-1)^2}2\delta^2-1}{2\left(1+\frac{n}{n-1}2\delta^2\right)^2}\right\}.$$

Il valore di δ, lo ricordiamo, deve dedursi della formula (4).

4. Ecco i valori di R_n trovati per mezzo delle formule (4′) e (7) per varî valori di n. Sono scritti di fronte i valori medî dello stesso R_n quali risultano dalle statistiche del tenente Mazzuoli, e, in un'ultima colonna, i numeri di serie dalle quali quei valori medî furono dedotti:

n	R_n teorico	R_n osservato	Numero delle serie
3	1,95	1,78	116
4	2,17	2,12	65
5	2,31	2,24	116
6	2,46	2,44	99
8	2,64	2,57	54
9	2,72	2,72	97
10	2,79	2,75	68
12	2,90	2,92	70
16	3,08	3,02	44
18	3,15	3,18	42

La concordanza è assai buona: tendono generalmente ad essere alquanto maggiori i valori teorici; nè deve ciò far meraviglia poichè il nostro calcolo si riferisce ai *veri* errori, mentre l'osservazione riguarda gli *scostamenti dalla media*.

5. Nel caso di $n = 3$, la formula (3) può calcolarsi esattamente. Si ha infatti, colla integrazione per parti, osservando che $\frac{d\varphi}{dz} = e^{-z^2}$,

$$\int_0^\infty z e^{-z^2} \cdot \varphi^2 \cdot dz = \int_0^\infty e^{-2z^2} \cdot \varphi \cdot dz. \tag{8}$$

E col solito sviluppo in serie esponenziale

$$\varphi = \int_0^z e^{-t^2}\, dt = \sum_0^\infty (-1)^r \frac{z^{2r+1}}{r!\,(2r+1)}\ .$$

Sostituendo in (8) ed osservando che

$$\int_0^\infty e^{-2z^2} \cdot z^{2r+1} \cdot dz = \frac{r!}{2^{r+2}}$$

si ha

$$\int_0^\infty z e^{-z^2} \cdot \varphi^2\, dz = \sum_0^\infty \frac{(-1)^r}{(2r+1)\, 2^{r+2}} = \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 2^2} - \frac{1}{7 \cdot 2^3} + \right\}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ arc tang } \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Si ha poi evidentemente

$$\int e^{-z^2} \cdot \varphi^2 \cdot dz = \frac{\varphi^3}{3}\ .$$

Quindi poichè $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\int_0^\infty e^{z^2}\, \varphi^2\, dz = \frac{1}{24}\, \pi^{3/2}\ .$$

Il valor medio di X_n dato dalla (2) è dunque nel caso $n = 3$,

$$X_3 = \frac{12}{h\pi\sqrt{2\pi}} \text{ arc tang } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}9380}{h}\ .$$

Quindi

$$R_3 = \frac{X_3}{\varrho} = 1{,}96$$

valore pochissimo differente da quello (1,95) trovato col calcolo approssimato per mezzo della (7). La quale formula (7) dà poi tanto maggiore approssimazione, quanto più grande è n.