ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Zoologia. — *Intorno ad un nuovo Flebotomo.* Nota del Socio B. GRASSI.

Zoologia. — *Sulla classificazione delle Fillossere.* Nota del Socio B. GRASSI e di A. FOÀ.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Il più generale metodo di rappresentazione che serve di base alla Geometria descrittiva ordinaria.* Nota del prof. A. DEL RE, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Il modo più generale di fare della Geometria descrittiva comune, consiste nel rappresentare lo spazio punteggiato sulle coppie di punti di un piano allineate con un fisso, in guisa che i piani vengano rappresentati da omologie; ovvero, ciò che vale la stessa cosa, nel rappresentare lo spazio di piani per mezzo delle omologie dotate di un centro fisso, in guisa che il punto d'intersezione di tre piani venga rappresentato dalla coppia comune alle tre omologie rappresentatrici di quei piani. Siffatte rappresentazioni sono possibili, poichè il gruppo delle omologie di un piano dotate di un centro fisso, quando vi si considerino pure le degeneri, costituisce una varietà entro la quale sono verificate proposizioni analoghe a quelle (postulati) sulle quali riposa la così detta linearità dello spazio punteggiato, e dello spazio dei piani. Si può a tale riguardo confrontare la mia Memoria: *Intorno ai metodi di rappresentazione della Geometria descrittiva*, pubblicata negli Atti dell'Accademia Pontaniana per gli anni 1904, Mª. n. 10, 1905 Mª. n. 5, 1906 Mª. n. 6. In questa Memoria io ho mostrato altresì come tutti gli usuali metodi di rappresentazione di cui si occupa la Geometria descrittiva suddetta possono essere derivati dall'unico metodo per immagini stereoscopiche (Mª. cit. del 1906), del quale si presentano puramente e semplicemente come casi particolarizzati (« metodo di Cousinery, metodo dei piani quotati »), o come casi particolarizzati ai quali faccia seguito l'intervento di ulteriori operazioni per proiezioni (« metodo di Monge, metodo delle proiezioni assonometriche »). Ora, io mi propongo in questo scritto di mostrare che, *a meno di una trasformazione omografica, il modo più generale di rappresentazione di cui innanzi si parla, è un metodo per immagini stereoscopiche.*

Tanto la via analitica che la sintetica conducono rapidamente allo scopo. Preferisco seguire la via analitica e usare coordinate proiettive generali, perchè queste conferiscono alla trattazione un'andatura più uniforme e più sbrigativa.

1. Assumiamo come piano di rappresentazione (quadro) il piano σ dei tre punti

$$X(\xi_1, \ldots, \xi_4) \quad , \quad Y(\eta_1, \ldots, \eta_4) \quad , \quad Z(\zeta_1, \ldots, \zeta_4) ,$$

sicchè un punto qualunque di questo piano venga rappresentato da un'equazione della forma

$$\lambda_1 u_\xi + \lambda_2 u_\eta + \lambda_3 u_\zeta = 0 , \tag{1}$$

ove $u_\chi = \sum_1^4 u_i \chi_i$, $\chi \equiv \xi, \eta, \zeta$, ed $u_1, \ldots, u_4$ sono le coordinate omogenee di un piano.

Un'omologia qualunque in σ potrà allora essere rappresentata con equazioni della forma

$$\left\{\begin{aligned} \tau\lambda'_1 &= (u_\theta + u_\xi)\,\lambda_1 + u_\eta\,.\,\lambda_2 + u_\xi\,.\,\lambda_3 \\ \tau\lambda'_2 &= u_\xi\,\lambda_1 + (u_\theta + u_\eta)\,\lambda_2 + u_\xi\,.\,\lambda_3 \\ \tau\lambda'_3 &= u_\zeta\,.\,\lambda_1 + u_\eta\,.\,\lambda_2 + (u_\theta + u_\zeta)\,\lambda_3 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove, come sopra, è $u_\theta = \sum_1^4 u_i\,\theta_i$, ed è, inoltre, $(\xi\eta\zeta\theta) \neq 0$; perchè: 1°) le (2), per

$$u_\xi\,.\,\lambda_1 + u_\eta\,.\,\lambda_2 + u_\zeta\,.\,\lambda_3 = 0 \tag{3}$$

dànno $\tau\lambda'_i = u_\theta\,.\,\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sicchè la (3) è, nel piano σ, l'equazione di una retta di punti uniti per l'omografia $\boldsymbol{\Omega}$ dalle (2): l'asse di $\boldsymbol{\Omega}$;

2°) per $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ldots (4)$, le stesse (2) dànno

$$\tau\lambda'_i = (u_\xi + u_\eta + u_\zeta + u_\theta)\lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

sicchè il punto (4), cioè il punto di coordinate

$$v_i = \xi_i + \eta_i + \zeta_i \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

è, per la $\boldsymbol{\Omega}$, un punto unito generalmente fuori della (3): *il centro* di $\boldsymbol{\Omega}$. L'essere sulla (3) un tal punto implica, per le (4), che le u siano scelte in guisa da aversi, circostanza importante,

$$u_\xi + u_\eta + u_\zeta = 0 , \tag{6}$$

equazione del punto (4).

2. Il determinante delle (2)

$$(7)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} u_\xi + u_\theta & u_\eta & u_\zeta \\ u_\xi & u_\eta + u_\theta & u_\zeta \\ u_\xi & u_\eta & u_\zeta + u_\theta \end{vmatrix} = u_\theta^2 (u_\xi + u_\eta + u_\zeta + u_\theta),$$

e l'equazione caratteristica per gli elementi uniti è, invece,

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} u_\xi + u_\theta - \sigma & u_\eta & u_\zeta \\ u_\xi & u_\eta + u_\theta - \sigma & u_\zeta \\ u_\xi & u_\eta & u_\zeta + u_\theta - \sigma \end{vmatrix} = (u_\theta - \sigma)^2 (u_\xi + u_\eta + u_\zeta + u_\theta - \sigma) = 0 .$$

Da ciò si vede di nuovo, dopo aver constatato che $\sigma = u_\theta$ annulla i minori del 2° ordine di $\Delta(\sigma)$, che le (2) rappresentano un'omologia.

3. Le omologie Ω dipendono linearmente dai parametri $u_\xi, u_\eta, u_\zeta, u_\theta$, e sono tutte le omologie del piano $\sigma \equiv XYZ$ che hanno in comune il centro nel punto (6).

Alla omologia Ω data dai parametri $u_\xi, u_\eta, u_\zeta, u_\theta$, facciamo corrispondere il piano u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 dato dalle formole:

$$(8)\qquad \sigma u'_1 = u_1 ,\ \sigma u'_2 = u_1 ,\ \sigma u'_3 = u_3 ,\ \sigma u'_4 = u_4 ;$$

avremo una omografia nella quale il piano corrispondente di una data omologia contiene l'asse di questa; poichè, come si deduce da (3), le coordinate di un punto di tal asse sono, per $i = 1, \ldots, 4$:

$$s_i = \lambda_1 \xi_i + \lambda_2 \eta_i + \lambda_3 \zeta_i ,$$

e si ha:
$$u'_s = \lambda_1 u_\xi + \lambda_2 u_\eta + \lambda_3 u_\zeta = 0 .$$

4. In grazia di (7) le omologie degeneri del gruppo si hanno allorchè

$$u_\theta = 0 \quad , \quad \text{o} \quad u_\xi + u_\eta + u_\zeta + u_\theta = 0 ;$$

i piani corrispondenti formano due stelle coi centri nei punti di coordinate

$$\theta_i \ \text{e}\ \xi_i + \eta_i + \zeta_i + \theta_i = v_i + \theta_i \quad (i = 1, \ldots, 4),$$

cioè in due punti T, V allineati col centro U, comune alle omologie del gruppo. I piani comuni alle due stelle rappresentano le omologie doppiamente degenerate del gruppo stesso, cioè le omologie in cui ogni punto dell'asse (il quale ora passa per U) forma coppia con un punto qualunque dell'asse stesso, in cui ogni punto del piano forma coppia con U, ed in cui U forma coppia con un punto qualunque del piano.

5. Le formule della omologia inversa di una data sono:

$$\tau\lambda_1 = \begin{vmatrix} \lambda'_1 & u_\eta & u_\zeta \\ \lambda'_2 & u_\theta + u_\eta & u_\zeta \\ \lambda'_3 & u_\eta & u_\theta + u_\eta \end{vmatrix} \equiv (u_\theta + u_\eta + u_\zeta)\,\lambda'_1 - u_\eta\,\lambda'_2 - u_\zeta\,.\,\lambda'_3$$

$$\tau\lambda'_2 \equiv - u_\xi\,\lambda'_1 + (u_\theta + u_\xi + u_\zeta)\,\lambda'_2 - u_\zeta\,.\,\lambda'_3$$
$$\tau\lambda'_3 \equiv - u_\xi\,\lambda'_1 - u_\eta\,\lambda'_2 + (u_\theta + u_\xi + u_\eta)\,.\,\lambda'_3.$$

Per la coincidenza con le date occorre che si abbia

$$u_\theta + u_\xi = -(u_\eta + u_\zeta + u_\theta)$$
$$u_\theta + u_\eta = -(u_\zeta + u_\xi + u_\theta)$$
$$u_\theta + u_\zeta = -(u_\xi + u_\eta + u_\theta);$$

ovvero:

$$u_\xi + u_\eta + u_\zeta + 2u_\theta = 0.$$

I piani corrispondenti formano una stella col centro nel punto W, allineato coi punti

$$U \equiv u_\xi + u_\eta + u_\zeta = 0 \quad , \quad T \equiv u_\xi + u_\eta + u_\zeta + u_\theta = 0 \quad , \quad V \equiv u_\theta = 0$$

e separante, insieme ad U, armonicamente T e V, come si vede chiarissimamente dall'essere (simbolicamente)

$$U \equiv T - V \quad , \quad W \equiv T + V.$$

Ciò concorda con quanto venne detto alla citata M^a. del 1904 sulla rappresentazione delle omologie armoniche del gruppo.

6. Le omologie corrispondenti ai piani della stella (T), cioè ai piani pei quali è $u_\theta = 0$, degenerano in guisa che mentre in ognuna U corrisponde ad un punto qualunque, ad un punto situato sull'asse corrisponde un punto qualunque del raggio che lo proietta da U. Le omologie corrispondenti ai piani della stella (V), cioè ai piani pei quali $u_\xi + u_\eta + u_\zeta + u_\theta = 0$, degenerano, invece, in guisa che in ognuna U ha per corrispondente un punto qualunque, ed un punto dell'asse è il corrispondente di un punto qualunque del raggio che lo proietta da U.

Combinando questi due fatti con quanto venne già rilevato in fine del n° 4, e che, del resto, è conseguenza dei fatti stessi riuniti insieme, si ha che, preso ad arbitrio un punto A nello spazio, e tracciati per A i piani $ATV \equiv \alpha$, $ATB \equiv \beta$, $AVB \equiv \gamma$, dove B è un punto qualunque fuori di α, se si pone

$$\sigma(\alpha\,,\beta\,,\gamma) \equiv a\,,\,b'\,,\,c''$$
$$a(b'\,,\,c'') \equiv A'\,,\,A''\,,$$

sarà (A', A'') la coppia comune alle tre omologie rappresentatrici dei piani

α, β, γ; epperò, per le (8), la coppia comune alle omologie rappresentatrici dei piani della stella (A): cioè la coppia rappresentatrice (vedi le parole di pref.) di A. Ma è, evidentemente, $A' \equiv \sigma\alpha\beta$, $A'' \equiv \sigma\alpha\gamma$; dunque, per essere $A \equiv \alpha\beta\gamma$, sarà pure $TA.\sigma \equiv A'$, $VA.\sigma \equiv A''$. Vale a dire, *nel metodo di rappresentazione istituito dalle* (8), *un punto qualunque dello spazio viene rappresentato dalle sue proiezioni, sul piano* σ, *fatte rispettivamente dai punti* T *ed* V; *o in altri termini, il metodo in esame è un metodo per immagini stereoscopiche con i centri in* T, V, *e col quadro in* σ.

Così, osservando che per costituire una relazione di omografia generale fra le omologie del gruppo che consideriamo ed i piani dello spazio occorre al posto delle (8) porre le

$$u'_\alpha \equiv u_\xi\,,\quad u'_\beta \equiv u_\eta\,,\quad u'_\gamma \equiv u_\zeta\,,\quad u'_\delta \equiv u_\theta\,,$$

dove $u'_\chi \equiv \sum_1^4 \chi_i u'_i \; (\chi \equiv \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e $(\alpha\beta\gamma\delta) \neq 0$, si conclude immediatamente la verità dell'affermazione che forma l'oggetto principale di questo scritto.

Meccanica. — *Sul moto di un corpo pesante intorno a un punto fisso.* Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Nuove ricerche sull'azione del campo magnetico sui depositi metallici ottenuti per ionoplastica* [1]. Nota del dottor G. Accolla, presentata dal Socio P. Blaserna.

I.

Nell'eseguire le ricerche che sono oggetto della presente Nota, ho preso le mosse dalle esperienze i cui risultati in parte riferii in una mia pubblicazione [2], che riuscì incompleta perchè nel corso del mio lavoro, ad esperienze quasi ultimate, venne a mia conoscenza una Nota, allora recentissima, di Maurin [3], il quale, quantunque con disposizioni sperimentali ben diverse

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Catania.

[2] Boll. Acc. Gioenia, fasc. LXXXVIII (1906), e Riv. Scient. Ind., anno XXXVIII, pag. 33.

[3] Compt. rend., (1905), t. CXLI, pag. 1223.