ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

Matematica. — *Sulla Astatica nello spazio a 4 dimensioni.* Nota del prof. A. Del Re, presentata dal Socio V. Cerruti.

Se in uno spazio ad n dimensioni S_n, ai punti $M_1, M_2, \dots, M_\mu$ di un corpo rigido $\sum$ sono rispettivamente applicate le forze $F_1, F_2, \dots, F_\mu$, e si fa subire ai punti all'infinito delle linee d'azione di queste forze una trasformazione omografica equivalente ad una sostituzione lineare *destrorsa* che conservi l'assoluto, il problema di cercare in quale posizione le forze si fanno equilibrio sul corpo, allorchè quella trasformazione omografica si fa variare con continuità, può essere considerato come il problema generale della Astatica in n dimensioni.

Come in S_3, così in S_n per $n > 3$, si può supporre che il corpo $\sum$ sia dotato di un punto fisso O, e come in S_3, così in S_n, invece di far subire ai punti all'infinito delle linee d'azione delle forze, la trasformazione omografica Ω con le qualità suddette, si possono tener ferme le singole direzioni delle forze e far subire al corpo supposto rappresentato da una n — pla $O(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di assi due a due ortogonali lo spostamento attorno ad O equivalente a quella trasformazione omografica $\mathfrak{R}$ che risulta dal proiettare da O la inversa della trasformazione Ω.

Se sopra una direzione fissa h, invariabilmente legata alle varie direzioni delle forze si proiettano queste in $H_1, H_2, \dots, H_n$, si avrà un sistema di forze parallele, il quale, qualunque sia la Ω, sarà sostituibile con una forza unica $H \equiv \sum F_i \,.\, \cos(F_i, h)$, applicata in un punto H (*centro* del sistema). Così, ad ogni punto all'infinito corrisponde un punto unico e ben determinato che si chiamerà la *sua immagine astatica*, ovvero *immagine astatica della direzione h* che definisce quel punto. Col teorema dei momenti si dimostra che se un punto all'infinito descrive una retta (una direzione varia appartenendo sempre ad una data giacitura) l'immagine astatica corrispondente descrive a sua volta una retta in dipendenza proiettiva con quella. E da ciò segue, senz'altro, che le immagini astatiche di tutte le direzioni coprono, in generale, un S_{n-1}, σ, omograficamente riferito all' S_{n-1}, σ', all'infinito. Si chiamerà σ *l'* S_{n-1} *centrale del corpo*; ed è, evidentemente, σ fisso nel corpo stesso. La omografia Γ fra σ e σ' si chiamerà *omografia di posizione* del sistema delle forze rispetto al corpo, e si considererà come passaggio dai punti di σ' ai punti di σ.

Per mezzo di Γ, all'assoluto corrisponde in σ una quadrica immaginaria ad $n - 2$ dimensioni, in generale, Q_{n-2}, e ad una piramide auto-polare rispetto a quella una piramide auto-polare rispetto a questa; epperò, decomponendo il dato sistema di forze secondo n direzioni due a due ortogonali fra loro, e facendo variar queste col tenerle invariabilmente legate alle direzioni delle forze, le componenti gireranno intorno alle corrispondenti immagini astatiche senza cambiare di intensità; e così, chiamando, come fece Darboux in S_3, la Q_{n-2} *quadrica centrale*, si ha il teorema:

Le forze del dato sistema sono sostituibili con un gruppo di n forze applicate nei vertici di una piramide autopolare rispetto alla quadrica centrale, e dirette secondo n direzioni due a due ortogonali fra loro.

Cambiando di posizione il sistema delle forze rispetto al corpo, cioè facendo subire ai loro punti all'infinito una trasformazione Ω, cambia la Γ, e la nuova omografia di posizione Γ_1 può considerarsi come risultante dal prodotto di Ω^{-1} per Γ, in modo da potersi scrivere $\Gamma_1 \equiv \Omega^{-1}\,\Gamma$. In grazia del teorema precedente, Γ_1 rappresenterà una posizione del sistema delle forze in equilibrio sul corpo col punto O tenuto fisso, se una piramide autopolare rispetto all'assoluto e la sua corrispondente in Γ_1 sono prospettive col centro in O. Il problema, quindi, di condurre le forze da una posizione generica data Γ ad una posizione di equilibrio, si riduce a quello di costruire una Ω che dia una Γ_1 con la qualità ora indicata.

Per fare ciò, e supponendo per fissare le idee $n = 4$, si istituisca un metodo di proiezione centrale in S_4 col prendere quale *centro* il punto O e quale *quadro* lo spazio a 3 dimensioni σ; allora, per ogni direzione h, oltre la immagine astatica H, vi sarà una immagine *prospettica* H', ogni omografia Γ potrà considerarsi come passaggio dai punti H' ai punti H, ed ogni omografia Ω come omografia trasformante in sè il sistema anti-polare Π rispetto alla *sfera di distanza* (sfera di centro, il piede della perpendicolare condotta da O a σ; di raggio, la lunghezza di questa perpendicolare).

Così pensate le Γ e le Ω, ogni Γ_1 la quale risponde al nostro problema mentre trasformerà Π in Q_2 (indicheremo pure con Q_2 il sistema polare rispetto alla quadrica centrale) avrà per piramide di elementi uniti la piramide auto-polare comune a Π e Q_2. Ne segue che data, o trovata, la Γ, si cercherà la piramide $A'_1\,A'_2\,A'_3\,A'_4$ (auto-polare rispetto a Π) che ha per corrispondente in Γ la piramide $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ auto-polare comune rispetto a Π e Q_2; indi si costruiranno le omografie Ω_i che, mentre trasformano Π in sè, fanno corrispondere $A_1 \ldots A_4$ ad $A'_1 \ldots A'_4$; allora le $\Gamma_i \equiv \Omega_i^{-1}\,\Gamma$ rappresenteranno altrettante posizioni di equilibrio del sistema delle forze col punto O tenuto fisso.

Non occorre che le Ω_i corrispondano strettamente parlando a movimenti; basta che esse trasformino Π in sè; però, quando le Ω_i rispecchiano movimenti, le $\mathfrak{R}_i$ corrispondenti risolvono il problema di *condurre il corpo solido $\sum$ dalla posizione attuale ad una posizione di equilibrio quando le forze siano tenute ferme in direzione ed in intensità.*

Alla domanda: *Esistono punti intorno a ciascuno dei quali*, tenuto fisso nel corpo, *siano possibili infinite posizioni di equilibrio?*, i risultati precedenti permettono rispondere che, se un punto O con tale qualità esiste, il sistema polare Π ha infiniti tetraedri auto-polari comuni con la quadrica Q_2; epperò l'omografia risultante dalla composizione di Π con Q_2 sarà biassale (con due assi di punti e piani uniti) od omologica. Questo secondo caso può presentarsi solo quando Q_2 sia di rotazione; il primo, invece, può aver luogo sempre, e si ha precisamente allorchè Q_2 è quadri-toccata dalla sfera centrale di Π (in coppie di punti di due sezioni principali). Ora, si supponga Q_2 riferita ai suoi assi, e che siano α, β, γ le coordinate del centro di Π ed id $(i=\sqrt{-1})$ il raggio della sfera corrispondente; saranno

$$\frac{xx'}{\lambda^2}+\frac{yy'}{\mu^2}+\frac{zz'}{\nu^2}+1=0 \tag{1}$$

$$(x-\alpha)(x'-\alpha)+(y-\beta)(y'-\beta)+(z-\gamma)(z'-\gamma)+d^2=0, \tag{2}$$

dove $(x, y, z), (x', y', z')$ sono coordinate di punti coniugati, le equazioni dei sistemi polari Q_2, Π; sicchè, posto

$$h^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+d^2, \tag{3}$$

l'omografia risultante dal prodotto di tali sistemi polari sarà rappresentata (in coordinate planari) dalle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{-\lambda^2 u+\alpha}{\lambda^2\alpha\,.\,u+\mu^2\beta\,.\,v+\nu^2\gamma\,.\,w-h^2} \\ v' &= \frac{-\mu^2 v+\beta}{\lambda^2\alpha\,.\,u+\mu^2\beta\,.\,v+\nu^2\gamma\,.\,w-h^2} \\ w' &= \frac{-\nu^2 w+\gamma}{\lambda^2\alpha\,.\,u+\mu^2\beta\,.\,v+\nu^2\gamma\,.\,w-h^2}, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

e l'equazione caratteristica corrispondente sarà (in θ):

$$\begin{vmatrix} -\lambda^2-\theta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\mu^2-\theta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\nu^2-\theta & \gamma \\ \lambda^2\alpha & \mu^2\beta & \nu^2\gamma & -h^2-\theta \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(\lambda^2+\theta)(\mu^2+\theta)(\nu^2+\theta)(h^2+\theta)+ \\ &-\lambda^2\alpha^2(\mu^2+\theta)(\nu^2+\theta)+ \\ &-\mu^2\beta^2(\nu^2+\theta)(\lambda^2+\theta)+ \\ &-\nu^2\gamma^2(\lambda^2+\theta)(\mu^2+\theta)=0. \end{aligned} \tag{5}$$

Supponendo, ciò che è il caso generale, Q_2 non di rotazione, supporremo $\lambda^2>\mu^2>\nu^2$; e da quanto si è detto risulta che la omografia (4) sarà della specie richiesta se due radici della (5) annullano tutti i minori del 3° ordine del determinante (5) senza annullare quelli del 2° ordine; e che ciò può avvenire in ciascuno dei tre casi seguenti:

$$1^\circ.\ \beta=\gamma=0\quad;\quad 2^\circ.\ \gamma=\alpha=0\quad;\quad 3^\circ.\ \alpha=\beta=0.$$

Fermandoci al 1° caso ed introducendo nella (5) le condizioni $\beta = \gamma = 0$, questa diventa, dopo qualche riduzione,

$$(\mu^2 + \theta)(\nu^2 + \theta)\,.\,\{\theta^2 + (\alpha^2 + d^2 + \lambda^2)\,\theta + \lambda^2 d^2\} = 0\,, \tag{6}$$

mentre il determinante corrispondente assume la forma,

$$\left|\begin{array}{cccc} -\lambda^2-\theta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\mu^2-\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^2-\theta & 0 \\ \lambda^2\alpha & 0 & 0 & d^2-\alpha^2-\theta \end{array}\right| \tag{7}$$

Fra le radici della (6) rispondono al nostro scopo $\theta = -\mu^2$, e $\theta = -\nu^2$. Per ciascuno di questi valori di θ sono nulli tutti i determinanti del 3° ordine di (7) eccetto uno; esprimendo perciò che, in entrambi i casi, anche questo deve essere nullo, si avranno due relazioni fra d ed α, le quali diranno come deve essese scelto Π e conseguentemente il corrispondente punto O perchè, intorno ad O, siano possibili infinite posizioni di equilibrio. Per $\theta = -\mu^2$, e per $\theta = -\nu^2$, i determinanti del 3° ordine di (7) da annullarsi dànno rispettivamente le condizioni

$$\left|\begin{array}{ccc} \mu^2-\lambda^2 & 0 & \alpha \\ 0 & \mu^2-\nu^2 & 0 \\ \lambda^2\alpha & 0 & \mu^2-\alpha^2-d^2 \end{array}\right| = 0 \quad , \quad \left|\begin{array}{ccc} \nu^2-\lambda^2 & 0 & \alpha \\ 0 & \nu^2-\mu^2 & 0 \\ \lambda^2\alpha & 0 & \nu^2-\alpha^2-d^2 \end{array}\right| = 0\,,$$

che possono mettersi sotto la forma

$$(\mu^2-\lambda^2)(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\alpha^2-d^2) - \lambda^2\alpha^2(\mu^2-\nu^2) = 0$$
$$(\nu^2-\lambda^2)(\nu^2-\mu^2)(\nu^2-\alpha^2-d^2) - \lambda^2\alpha^2(\nu^2-\mu^2) = 0\,;$$

ovvero, per essere $\nu^2 - \mu^2 \neq 0$, sotto l'altra:

$$(\mu^2-\lambda^2)(\mu^2-\alpha^2-d^2) - \lambda^2\alpha^2 = 0 \quad ; \quad (\nu^2-\lambda^2)(\nu^2-\alpha^2-d^2) - \lambda^2\alpha^2 = 0\,;$$

o ancora:

$$-\mu^2\alpha^2 + (\lambda^2-\mu^2)d^2 - \mu^2(\lambda^2-\mu^2) = 0\,; -\nu^2\alpha^2 + (\lambda^2-\nu^2)d^2 - \nu^2(\lambda^2-\nu^2) = 0.$$

Se nello spazio S_4 nel quale consideriamo il corpo $\sum$, scegliamo quali assi cartesiani ortogonali i tre assi della quadrica centrale e la perpendicolare nel suo centro C all' S_3 che la contiene, e chiamiamo t questo quarto asse, le 4 coordinate $x\,,y\,,z\,,t$ del punto O, corrispondentemente ai casi precedenti sono

$$x = \alpha \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad t = d$$

d'onde segue che le due coniche

$$(8)\qquad -\frac{x_2}{\lambda^2-\mu^2}+\frac{t^2}{\mu^2}-1=0 \qquad \text{iperb. d'asse reale } t$$

$$(9)\qquad -\frac{x^2}{\lambda^2-\nu^2}+\frac{t^2}{\nu^2}-1=0 \qquad \text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\ ,$$

nel piano coordinato tx, rappresentano ciascuna un luogo cui deve appartenere un punto O. Evidentemente nessun punto reale risponde al quesito.

Se nella (5) introduciamo le condizioni $\gamma=\alpha=0$, un analogo ragionamento ci porterà a concludere che nel piano coordinato ty troviamo, come luogo cui devono appartenere i punti O, ciascuna delle due coniche,

$$(10)\qquad -\frac{y^2}{\mu^2-\nu^2}+\frac{t^2}{\nu^2}-1=0 \qquad \text{iperb. d'asse reale } t\,,$$

$$(11)\qquad -\frac{y^2}{\mu^2-\lambda^2}+\frac{t^2}{\lambda^2}-1=0 \qquad \text{ellisse}.$$

Queste hanno 4 punti reali in comune; dunque *quattro* punti rispondono al quesito. Introducendo, invece, nella (5) le condizioni $\alpha=\beta=0$, troviamo nel piano coordinato tz, come luogo cui devono appartenere i punti O, le due coniche

$$(12)\qquad -\frac{z^2}{\nu^2-\lambda^2}+\frac{t^2}{\lambda^2}-1=0 \qquad \text{ellisse}$$

$$(13)\qquad -\frac{z^2}{\nu^2-\mu^2}+\frac{t^2}{\mu^2}-1=0 \qquad \text{"}\ ,$$

che, evidentemente essendo interne l'una all'altra, non hanno punti reali in comune; epperò non esistono punti rispondenti al quesito.

Se supponiamo che la Q_2 sia di rotazione è da distinguere il caso in cui essa è *schiacciata* (usiamola pure questa espressione, ora che Q_2 è immaginaria) da quello in cui è *allungata*; il che faremo in ultimo. Perciò, supposta la equazione di Q_2 nella forma

$$(14)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2+z^2}{\mu^2}+1=0$$

supporremo che sia indifferentemente $\lambda^2 \lesseqgtr \mu^2$.

Per avere dal prodotto $\boldsymbol{\Pi}Q_2$ un'omografia biassiale o un'omologia bisognerà cominciare dal supporre che sia $\alpha=0$, o $\beta=\gamma=0$. Quando è $\alpha=0$, la equazione (5) prende la forma

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} -\lambda^2-\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^2-\theta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\mu^2-\theta & \gamma \\ 0 & \mu^2\beta & \mu^2\gamma & -h^2-\theta \end{vmatrix} = (\lambda^2+\theta)(\mu^2+\theta)\{(\mu^2+\theta)(h^2+\theta)+ -\mu^2(\beta^2+\gamma^2)\}=0\,;$$

e quando, in vece, è $\beta = \gamma = 0$ prende l'altra

$$(16)\quad \begin{vmatrix} -\lambda^2-\theta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\mu^2-\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2-\theta & 0 \\ \lambda^2\alpha & 0 & 0 & -h^2-\theta \end{vmatrix} = (\mu^2+\theta)^2 \{(\lambda^2+\theta)(h^2+\theta) + \\ -\lambda^2\alpha^2\} = 0.$$

Ora per $\theta = -\lambda^2$ si annullano tutti i determinanti del 3° ordine del determinante (15), eccetto quello formato dalle tre ultime orizzontali e dalle tre ultime verticali; se dunque scriviamo la equazione

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \lambda^2-\mu^2 & 0 & \beta \\ 0 & \lambda^2-\mu^2 & \gamma \\ \mu^2\beta & \mu^2\gamma & -h^2-\theta \end{vmatrix} = 0,$$

avremo una relazione che dovrà correre fra β, γ, d perchè Π abbia un bicontatto con Q_2 (ΠQ_2 abbia un asse di punti uniti). Riferendoci, come sopra, ad una quaterna d'assi, di cui tre siano quelli cui è riferita Q_2 nel suo S_3, abbiamo che le coordinate del punto O corrispondente al Π in questione sono

$$x = 0\,,\ y = \beta\,,\ z = \gamma\,,\ t = d\,.$$

Dunque, svolgendo il determinante (17), riducendo col ricordare che $h^2 = \beta^2 + \gamma^2 + d^2$, e facendo le sostituzioni precedenti troviamo che nello spazio S_3 che dall'asse t proietta il piano equatoriale della quadrica centrale, le coordinate di O soddisfanno ad un'equazione della forma

$$(\lambda^2-\mu^2)\,\lambda^2 - (\lambda^2-\mu^2)\,t^2 - \lambda^2(y^2+z^2) = 0,$$

ovvero all'equazione

$$(18)\qquad \frac{y^2+z^2}{\lambda^2-\mu^2} + \frac{t^2}{\lambda^2} - 1 = 0,$$

la quale rappresenta un'*ellissoide* o un'*iperboloide* di rotazione intorno all'asse t, secondochè la quadrica centrale è allungata ($\lambda^2 > \mu^2$), o schiacciata ($\lambda^2 < \mu^2$).

Per $\theta = -\mu^2$ si annullano tutti i minori del 2° ordine del determinante (16), eccetto quello formato dalle 1ª e 4ª orizzontali e dalle 1ª e 4ª verticali. Se dunque scriviamo la equazione

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} \mu^2-\lambda^2 & \alpha \\ \lambda^2\alpha & \mu^2-h^2 \end{vmatrix} = 0,$$

avremo la relazione che deve correre fra α e d perchè il prodotto ΠQ_2 sia un'omologia (Π e Q_2 si tocchino lungo una comune sezione). Le coordinate del punto O corrispondente di un Π siffatto, sono, nel caso presente,

$$x = \alpha\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ t = d\,;$$

dunque, svolgendo la (19) col tener conto che $h^2 = \alpha^2 + d^2$, si deduce che O appartiene al luogo rappresentato dall'equazione

$$(\mu^2 - \lambda^2)(\mu^2 - x^2 - t^2) - \lambda^2 . x^2 = 0 ;$$

ovvero alla conica (del piano tx):

$$(20) \qquad -\frac{x^2}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{t^2}{\mu^2} - 1 = 0 ,$$

che è un' *iperbole* se Q_2 è allungata, ed un'*ellisse* se Q_2 è schiacciata.

La iperbole (8) e la ellisse (11), la iperbole (10) e la ellisse (13), la iperbole (9) e la ellisse (12) sono ordinatamente nelle tre coppie di piani tx, ty; ty, tz; tz, tx ortogonali due a due, *focali* l'una dell'altra e focali alla sezione principale della quadrica centrale i cui assi sono in quei piani. Tali coniche, individualmente prese, sono ciascuna il luogo di un punto intorno al quale sono possibili infinite posizioni nelle quali le forze sono sostituibili con una coppia. L'ellissoide, o l'iperboloide (18), e la iperbole, o l'ellisse (20), stanno rispettivamente in uno spazio ed in un piano perpendicolari fra loro; l'asse maggiore dell'ellissoide, o reale dell'iperboloide, è l'asse reale dell'iperbole, o il maggiore dell'ellisse; i fuochi dell'ellissoide, o iperboloide, sono sull'iperbole, o sull'ellisse, ed inversamente; la quadrica e la conica sono cioè come diremo, *focali* l'una dell'altra. La quadrica è luogo di un punto tale che tenendolo fermo si possono dare alle forze infinite posizioni in ciascuna delle quali le forze stesse sono sostituibili con una coppia; la conica è invece luogo di un punto intorno al quale sono possibili infinite posizioni di equilibrio.

Riassumendo abbiamo, dunque, l'enunciato seguente:

1° *Sono possibili* ∞^2 *posizioni d'equilibrio, nel caso generale, soltanto intorno a 4 punti del piano condotto per l'asse medio della quadrica centrale normalmente allo spazio che contiene tale quadrica; e nel caso in cui questa è di rotazione sono possibili* ∞^3 *posizioni di equilibrio intorno a ciascuno dei punti di una conica giacente nel piano normale a quello spazio condotto per l'asse di rotazione, conica che è ellisse, o iperbole, secondochè la quadrica è schiacciata, o allungata.*

2° *Esiste un luogo di punti tale che, fissando il corpo intorno ad uno di essi sono possibili per le forze* ∞^1 *posizioni, in ciascuna delle quali le forze stesse si lasciano ulteriormente equilibrare da una coppia; e questo luogo è composto:*

α) nel caso generale, da sei coniche appartenenti per coppie ai tre piani normali allo spazio centrale, condotti rispettivamente per gli assi della quadrica centrale, delle quali quelle giacenti nel piano per l'asse maggiore sono iperboli, quelle nel piano per l'asse medio sono l'una iper-

bole l'altra ellisse, quelle nel piano per l'asse minore sono ellissi (1); *e distribuibili altresì in coppie formate ciascuna di una ellisse e di un'iperbole focali l'una dell'altra, e focali con una sezione principale della quadrica centrale.*

β) nel caso in cui la quadrica centrale è di rotazione, da una quadrica concentrica pure di rotazione che ha con quella in comune il piano equatoriale, che giace nello spasio condotto per questo piano normalmente allo spasio centrale, e che è un ellissoide, o un iperboloide, secondochè la quadrica centrale è schiacciata, o allungata.

Restano a considerarsi il caso in cui la Q_2 è una sfera, nel qual caso tutte le posizioni intorno al centro sono posizioni di equilibrio, e quelli nei quali la Q_2 degenera. In questi ultimi casi le forze del sistema sono parallele ad uno stesso spazio senza essere parallele ad un medesimo piano, o sono parallele ad uno stesso piano senza essere parallele ad una medesima retta. Non è difficile modellare la loro trattazione su quanto venne precedentemente detto, nè è difficile, seguendo la via indicata, trattare il problema analogo in S_n per $n > 4$.

Stretto legame esiste fra il presente lavoro ed i seguenti:

1° Del Re. — *Sulle quattro rotazioni che sovrappongono un triedro trirettangolo sopra un triedro trirettangolo* etc. Rend. Acc., Napoli, anno 1904.

2° Del Re. — *Sulle focali di Minding*. Rend. Acc. dei Lincei, 1905.

3° Del Re. — *La Astatica e le sue rappresentazioni prospettiche*. Rend. Acc. Napoli, 1906.

Meccanica. — *Sul moto di un corpo pesante intorno a un punto fisso*. Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il sig. Stäckel ha recentemente (2) richiamata l'attenzione dei matematici su di un notevole contributo arrecato nel 1903 dal matematico russo sig. P. A. Schiff, allo studio del moto del giroscopio pesante (3). Il signor Schiff ha considerato quei movimenti nei quali resta costante la grandezza del vettore momento dell'impulso e che possono essere studiati col sussidio

(1) È superfluo avvertire che qui con le parole *asse maggiore, medio, minore* intendiamo riferirci rispettivamente agli assi pei quali $\lambda^2 > \mu^2 > \nu^2$.

(2) *Ausgezeichnete Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels.* [Mathematische Ann. Bd. 65, pp. 538-555 (1908)].

(3) *Sulle equazioni differenziali del movimento di un corpo pesante intorno a un punto fisso.* [Raccolta matematica di Mosca, v. 24, pp. 169-177 (1903)].